II Utiliser la dimension finie

1 Familles libres /génératrices en dimension finie

- **Cadre.** • E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. • $n = \dim E$.

Théorème 1

1.

2.

Exercice 1 — Démontrer le théorème.

Exemple 1 — Montrer que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Théorème 2

1.

2.

Exercice 2 — Démontrer le théorème.

SF 4 : Montrer qu'une famille $(u_1, \dots, u_n)$ donnée est une base de E

• On constate qu'elle est de cardinal $n = \dim E$. • On vérifie uniquement la liberté

Exemple 2 — Montrer que $((2,3),(4,5))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 3 — Montrer que $(X + 2X^2\ ,\ 1 + 2X\ ,\ 2 + X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exemple 4 — Soit $a \in \mathbb{K}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $((X-a)^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple 5 — Soient $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts. On note $L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés aux x_i. Montrer que $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2 Sous-espaces et dimension

Théorème 3

On suppose que E est dimension finie n. Soit F un sous-espace vectoriel de E :

•

•

Exercice 3 — Démontrer le théorème.

SF 5 : Raisonnement par « inclusion dimension »

En dimension finie, étant donnés deux s.e.v F et G, pour montrer que $F = G$ on peut montrer que :
• $F \subset G$ • $\dim F = \dim G$.

Exemple 6 — Montrer que $\mathrm{Vect}(X-1\ ,\ X+2) = \mathbb{R}_1[X]$.

3 Rang d'une famille de vecteurs

- **Cadre.** • E est un $\mathbb{K}$-e.v. (de dimension quelconque) • $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille finie de vecteurs de E.
- **Remarque.** Le sous-espace $\mathrm{Vect}\mathscr{F}$ est de dimension finie (même si E n'est pas de dimension finie)

Définition 1

Le *rang* de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{rg}\mathscr{F}$ ou $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$, est la dimension du sev engendré par $\mathscr{F}$: $\mathrm{rg}\mathscr{F} \underset{\text{déf.}}{=}$

Théorème 4

• On a toujours :

• $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) = p$ ssi :

Exercice 4 SF 6 — Démontrer les deux points ci-dessus.

Exemple 7 — Déterminer le rang de : **a)** $\mathscr{F}_1 = ((1,1,0),(0,0,1))$ **b)** $\mathscr{F}_2 = ((1,1,0),(0,0,1),(1,1,1))$
c) $\mathscr{F}_1 = (1, X, X^2, X^3)$ **d)** $\mathscr{F}_2(X, 2X, 3X, 4X)$ **e)** $\mathscr{F}_3 = (X+1, X+2, X+3, X+4)$

Exemple 8 SF 6 — Soit $n \geq 2$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note f_k la fonction $x \mapsto \sin(k+x)$. Trouver le rang de $(f_1, \dots, f_n)$