Définition 1

Un $\mathbb{K}$-e.v. E est dit de dimension finie si :

Exemple 1 — Les espaces vectoriels suivants sont-ils de dimension finie ? **a)** $\mathbb{R}^2$ **b)** $\mathbb{K}^n$ **c)** $\mathbb{K}_n[X]$ **d)** $\mathbb{K}[X]$

1 Théorème de la base incomplète

- **Cadre.** • E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. • $\mathscr{G} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n)$ est une famille génératrice finie de E.

Théorème 1 : Les familles libres ont moins d'éléments que les génératrices

Toute famille libre de E possède au plus n éléments.

Exercice 1 — Montrer que dans un $\mathbb{K}$-e.v. engendré par n vecteurs, toute famille à $n+1$ éléments est liée.

Théorème 2 : Théorème de la base incomplète

Exercice 2 *Démonstration par récurrence descendante sur $p \in [\![0, n]\!]$* — Pour $p \in [\![0, n]\!]$, on note $\mathscr{H}_p$ la propriété : « Toute famille libre $\mathscr{L} = (\vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_p)$ à p éléments peut être complétée en une base à l'aide de vecteurs de $\mathscr{G}$ ».

1. *Initialisation : cas $p = n$.* Montrer que si $\mathscr{L} = (\vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_n)$ est libre, alors c'est une base de E.
2. *Hérédité. Soit $p \in [\![1, n]\!]$. On suppose $\mathscr{H}_p$ vraie et on souhaite montrer que $\mathscr{H}_{p-1}$ est vraie.* Soit $\mathscr{L} = (\vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_{p-1})$ une famille libre à $p-1$ éléments. Montrer que $\mathscr{L}$ peut être complétée en une base à l'aide de vecteurs de $\mathscr{G}$.

Exemple 2 — Compléter $\big((1,0,1)\big)$ en une base de $\mathbb{R}^3$. *On admet que les bases de $\mathbb{R}^3$ sont les familles libres à 3 vecteurs*

- **Remarque.** En prenant $\mathscr{L} = \varnothing$, le résultat montré dans l'exercice 2 assure aussi que :

2 Dimension d'un espace vectoriel

- **Notation.** Si $\mathscr{F}$ est une famille finie de vecteurs le cardinal de $\mathscr{F}$ est :

Théorème 3

- Si E est de dimension finie, alors toutes ses bases :
- On appelle *dimension de E* :

- **Remarque.** Pour déterminer $\dim E$ il suffit de :

Exercice 3 — Démontrer le théorème.

Exemple 3 — Déterminer la dimension de : $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(0)\}$.

Exemple 4 — L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Deviner sa dimension.

Exemple 5 — Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, démontrer que : $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

3 Exemples

Théorème 4 : Exemples fondamentaux

• Si $n \geq 1$: $\dim \mathbb{K}^n =$ • $\dim \mathbb{K}_n[X] =$ • Si $n, p \geq 1$: $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) =$

- **Remarque.** $E = \{\vec{0}_E\}$ est de dimension 0, une base est la famille vide.
- **Remarque.** • $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} =$ • $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} =$
- **Vocabulaire.** • une *droite vectorielle* est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension 1 • un *plan vectoriel* est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension 2

Exemple 6 — Montrer que $F = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n\right\}$ est un plan vectoriel.

Exemple 7 — **1.** Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}_1$ des solutions de $(1+t^2)y' - ty = 0$ est une droite vectorielle.
2. Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}_2$ des solutions de $y'' - 8y' + 15y = 0$ est un plan vectoriel.

Théorème 5 : Espace produit

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie alors $E \times F$ est de dimension finie et :