III Intégrales et primitives

- **Cadre.** I est un intervalle non vide et non réduit à un point.

1 Le théorème fondamental de l'analyse

Théorème 1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et $a \in I$.

-
-

Exercice 1 — Démontrer le théorème

- **Conséquences (rappels).** Toute fonction continue sur I possède des primitives ; on peut calculer une intégrale au moyen d'une primitive ; formules d'intégration par parties et du changement de variable.

Exemple 1 — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et T-périodique. Montrer : $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$

Exemple 2 — Soit f une fonction continue sur $[-a, a]$. Montrer que si f est paire : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Exemple 3 — Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Montrer que : $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

2 Etude d'une fonction définie par une intégrale

Théorème 2

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle J et à valeurs dans I.

La fonction $\quad \varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \quad$ est dérivable sur J et :

Exercice 2 — Démontrer la dérivabilité de φ et établir l'expression de φ'.

Exemple 4 — Soit $x > 0$. Calculer : $\displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{t \operatorname{Arctan} t}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$

Exemple 5 —

1. Montrer que $H : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et calculer H'
2. On note u la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Montrer que u est prolongeable par continuité en 1.
3. A l'aide de la fonction u, calculer la limite en 1^+ de la fonction H.
4. La fonction H est-elle prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, +\infty[$?

Exemple 6 — Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dans chaque cas, montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer φ' :

a) $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(x+t)\,\mathrm{d}t$ **b)** $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(x-t)\cos t\,\mathrm{d}t$