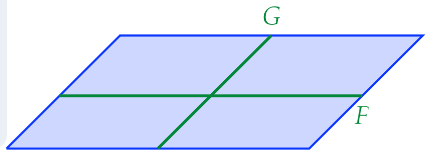
III Somme de sous-espaces

- **Cadre.** F et G désignent deux sous-espaces vectoriels de E.

1 Généralités

Définition 1

- La somme de F et G est le sous-espace :
- •
- Soit H un sev de E :



Exercice 1 — Vérifier que **a)** $F+G$ est un s.e.v. de E **b)** $F \subset F+G$

Exercice 2 SF 7 — Si $F = \mathrm{Vect}\big((1,0,0),(0,1,0)\big)$ et $G = \mathrm{Vect}\big((1,1,0),(1,0,1)\big)$ **a)** M.q. $F+G=\mathbb{R}^3$ **b)** Base de $F \cap G$?

Théorème 1 : Formule de Grassmann

Si F, G sont de dimension finie alors $F+G$ l'est aussi et :

2 Somme directe

Définition 2

On dit que F et G sont en somme *directe* si :

- **Notation.** Lorsque F et G sont en somme directe, la somme de F et G est notée :

Théorème 2 : Critère pratique

F et G sont en somme directe si et seulement si :

Exercice 3 — Démontrer cette équivalence.

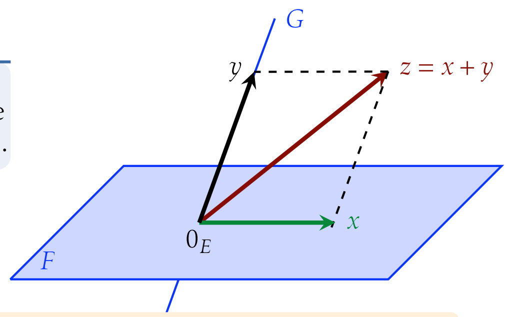
Exemple 1 —Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que $F = \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\big\}$ et $G = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$ sont en somme directe

- **Remarque.** Supposons F et G de dimension finie et notons $\mathscr{B}$ une base de F et $\mathscr{C}$ une base de G.
  - Si F et G sont en somme directe alors $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ est une base de $F \oplus G$ appelée *base adaptée à la somme directe* $F \oplus G$. En particulier $F \oplus G$ est de dimension finie et : $\boxed{\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G}$
  - Réciproquement, si la famille $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ est libre alors F et G sont en somme directe.

3 Sous-espaces supplémentaires

Définition 3

F et G sont *supplémentaires* si tout vecteur de E se décompose d'une manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.



- **Remarque.** Autrement dit, F et G sont supplémentaires si :

  • •

Exemple 2 — Montrer que $F = \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\big\}$ et $G = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 3 SF 8 ♥ — Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ montrer que l'ensemble F des fonctions paires et l'ensemble G des fonctions impaires sont des sous-espaces supplémentaires.

Exemple 4 — Soit $B \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$. Montrer : $\mathbb{K}[X] = B\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X]$ où $B\mathbb{K}[X] = \{BQ\,;\, Q \in \mathbb{K}[X]\}$

4 Supplémentaires en dimension finie

Théorème 3 : Supplémentaires en dimension finie

Si E de dimension finie, F et G sont en supplémentaires ssi

SF 8 : Montrer que F et G sont supplémentaires dans E

Exemple 5 — Montrer que $F = \mathrm{Vect}(2X+1)$ et $G = \mathrm{Vect}(X^2+X, X^2+X+1)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}_2[X]$.

Exemple 6 — On note $F = \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\big\}$ et $G = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$. Montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Théorème 4 : Existence de supplémentaires en dimension finie

Si E est de dimension finie alors tout sev. F de E possède :

Exercice 4 — Démontrer ce théorème à l'aide du théorème de la base incomplète.

SF 9 : Trouver un suppléméntaire en dimension finie

Exemple 7 — Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, trouver un supplémentaire de $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$