II Sous-espaces vectoriels

1 Définition

Définition 1

Soit F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si

- •F est stable par + : •F est stable par . :

SF 1 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E (méthode 1)

On vérifie que :*i)* *ii)*

Exemple 1 — Montrer que $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + 4z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Plus généralement, étant donnés $a, b, c \in \mathbb{R}$, $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2 — On pose $F_1 = \{(x,y) \mid x + y = 2\}$ et $F_2 = \left\{(x,y) \mid y = x^2\right\}$. Sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

Exemple 3 — Montrer que : $F = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

- **Remarque.** Si F est un sev de E alors $(F,+,\cdot)$ est :

En pratique : pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel

Le plus simple est de montrer que F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.

Exemple 4 — Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 5 — L'ensemble des fonctions continues (dérivables, $\mathscr{C}^1$,...) sur un intervalle I est un $\mathbb{R}$-e.v.

Théorème 1

Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est :

Exercice 1 — **a)** Prouver le théorème **b)** Montrer que la réunion de deux s.e.v. n'est en général pas un s.e.v.

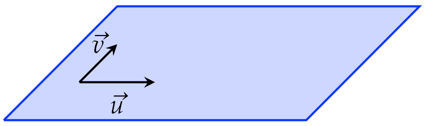
2 Sous-espaces vectoriels engendrés

- **Cadre.** $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ est une famille finie de vecteurs de E.

Définition 2

On note Vect $\mathscr{F}$ ou $\text{Vect}(\vec{u}_i)_{1\leq i\leq n}$ ou encore $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$

l'ensemble :



- **Remarque.** $\text{Vect}(\varnothing) =$

Exemple 6 — Dans $E = \mathbb{R}^2$, décrire géométriquement $\text{Vect}((1,2))$.

Exemple 7 — Dans $E = \mathbb{K}[X]$: $\text{Vect}(1, X, X^2, \ldots, X^n) =$

Exemple 8 — Dans $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: **a)** $\text{Vect}(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} =$ **b)** $\text{Vect}(E_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n} =$

Théorème 2

Exercice 2 — Démontrer ce théorème.

Théorème 3 : Caractérisation de « Vect »

Vect $\mathscr{F}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contienne $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ *i.e.* :

i) *ii)*

Exercice 3 — Démontrer le théorème.

SF 1 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel (méthode 2)

Il peut être utile d'écrire F « comme un Vect »

Exemple 9 — On pose $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y - z = 0\right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 10 — On pose $F = \left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + d = 0\right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Exemple 11 — On pose $F = \left\{(X-1)(aX+b)\,;\,(a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 12 — **1.** Montrer que l'ensemble F des solutions de $y'' + y = 0$ est un sous-e.v. de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Même question avec l'ensemble des solutions de $y'' - 8y' + 15y = 0$.

Exemple 13 — On considère l'ensemble F des suites réelles u vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles.