SF 1 — Montrer que F est un espace-vectoriel

- *Méthode 1.* On montre que F est un **sous**-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu :
  i) F possède le vecteur nul : $\vec{0}_E \in F$
  ii) F est stable par combinaisons linéaires :
  « Soient $\vec{x}, \vec{y} \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in F$ ... »
- *Méthode 2.* On montre que F est un sous-espace vectoriel engendré *i.e.* on écrit F « comme un Vect »

SF 2 — Montrer qu'une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre

- On considère une combinaison linéaire nulle : $(\star)\quad \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_E$.
- Avec $(\star)$ on forme un système vérifié par $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et on montre : $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$
- Dans le cas de fonctions ou de suites on peut évaluer $(\star)$ en des valeurs bien choisies

SF 3 — Trouver une base d'un sous-espace vectoriel F

- *Option 1 – si F est donné par des équations :*
  On écrit F comme un Vect puis on montre que la famille génératrice obtenue est aussi libre.
- *Option 2 – si F est donné sous forme de Vect :*
  On « chasse du Vect » les vecteurs qui sont combinaisons linéaires des autres jusqu'à obtenir une famille libre.
- *Option 3 – si on connaît déjà la dimension de F :*
  On cherche une famille libre de F ayant autant de vecteur que la dimension de F.

SF 4 — Montrer qu'une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ donnée est une base de E

- On constate qu'elle est de cardinal $n = \dim E$
- On vérifie uniquement la liberté

SF 5 — Montrer une égalité $F = G$ entre deux sous-espaces vectoriels

- *Option 1 – double inclusion.* On montre : • $F \subset G$ • $G \subset F$.
- *Option 2 – inclusion-dimension.* On montre : • $F \subset G$ • $\dim F = \dim G$.

SF 6 — Majorer/Minorer la dimension d'un sous-espace vectoriel F

- *Pour montrer que $\dim F \leq n$*
  - On montre que : $F \subset G$ où G est un sous-espace de dimension n.
  - On montre que : $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ pour certains $u_1, \ldots, u_n \in E$.
- *Pour montrer que $\dim F \geq n$*
  - On montre que : $G \subset F$ où G est un sous-espace de dimension n.
  - On montre que F possède une famille libre $(u_1, \ldots, u_n)$ de n vecteurs.

SF 7 — Déterminer $F \cap G$ (et $F + G$)

- *Situation 1 : cas où F et G sont des* Vect. Si $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ et $G = \mathrm{Vect}(\mathscr{G})$.
  i) On peut trouver une base de $F + G$ en partant de $F + G = \mathrm{Vect}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$.
  ii) La formule de Grassmann donne la dimension de $F \cap G$, reste à en trouver une famille libre avec autant d'éléments que la dimension.
- *Situation 2 : cas où F et G sont donnés par des équations.*
  - On trouve une base de $F \cap G$ en l'écrivant comme un Vect
  - La formule de Grassmann donne $\dim(F + G)$

SF 8 — Montrer que F et G sont supplémentaires dans E

- *Option 1.* On montre : • $\dim F + \dim G = \dim E$ • $F \cap G = \{0_E\}$.
- *Option 2.* On fixe $x \in E$. On montre par *analyse-synthèse* qu'il existe un unique couple de vecteurs $(y, z) \in E \times E$ tel que • $x = y + z$ • $y \in F$ • $z \in G$.
  - *Analyse.* Si la décomposition existe, on exprime y et z en fonction de x.
  - *Synthèse.* On teste le candidat *i.e.* on vérifie que : • $x = y + z$ • $y \in F$ • $z \in G$.

SF 9 — Trouver un supplémentaire G d'un s.e.v. F en dimension finie n

- On commence par trouver une base $\mathscr{F}$ de F, et donc aussi sa dimension p.
- On choisit une famille $\mathscr{G}$ de $n - p$ vecteurs de E (comme pour compléter $\mathscr{F}$ en une base de E) et on montre que $G = \mathrm{Vect}(\mathscr{G})$ convient (via l'option 1)

SF 10 — En pratique : pour montrer que B est une sous-algèbre de A

On vérifie que :
i) B possède l'élément neutre pour $\times$: $\vec{1}_A \in B$
ii) B est stable par combinaisons linéaires : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in B,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\quad \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in B$.
iii) B est stable par multiplication : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in B,\quad \vec{x} \times \vec{y} \in B$