SF 1 — Montrer que f est linéaire

« Soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x + \mu y) = \quad \dots \quad = \quad \dots \quad = \lambda f(x) + \mu f(y)$ »

SF 2 — Trouver une base de $\operatorname{Ker} f$

- On écrit $\operatorname{Ker} f$ comme un Vect : « Soit $x \in E$: $x \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \dots$ »
- On montre que la famille génératrice obtenue est aussi libre.

SF 3 — Montrer que $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est injective

On montre que $\operatorname{Ker} f$ est réduit à $\{0_E\}$:

- « Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0_F$ »
- On montre que $x = 0_E$.

SF 4 — Trouver une base de $\operatorname{Im} f$

- *Option 1 : avec une base $(b_1, \dots, b_n)$ de E.*
  - $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(b_1), \dots, f(b_n)\big)$.
  - Reste à « chasser du Vect » les vecteurs combinaisons linéaires des autres
- *Option 2 : avec la formule du rang.* En dimension finie :
  - si on connaît $p = \dim(\operatorname{Ker} f)$ et $n = \dim E$ alors $\dim(\operatorname{Im} f) = n - p$
  - on choisit $n - p$ vecteurs linéairement indépendants parmi $f(b_1), \dots, f(b_n)$.
- *Option 3 : avec la définition.*

  On fixe $y \in F$ et on cherche à quelle condition sur y l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in E$,possède une solution.

SF 5 — Montrer que $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est (ou n'est pas) surjective

- *Option 1 : on détermine $\operatorname{Im} f$.*

  f est surjective si et seulement si : $\operatorname{Im} f = F$.
- *Option 2 : en dimension finie.*

  Si $\dim E = \dim F$, f est surjective si et seulement si elle est injective.

SF 6 — Montrer que f est un isomorphisme de E sur F

- *Option 1 : en dimension finie.*

  Si $\dim E = \dim F$, il suffit de montrer que f est injective.
- *Option 2 : avec une base de E.*

  On montre que f transforme une base de E en une base de F.
- *Option 3 : on prouve la bijectivité*

  On prouve que f est injective et surjective.

SF 7 — Montrer que f est un isomorphisme de E sur F ET trouver f^{-1}

- *Option 1.* On trouve $g \in \mathscr{L}(F,E)$ telle que : $g \circ f = \operatorname{Id}_E$ et $f \circ g = \operatorname{Id}_F$.
- *Option 2.* On fixe $y \in F$ et on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.

SF 8 — Montrer une inégalité sur $\operatorname{rg} f$

- *Option 1 : A partir de $\operatorname{Im} f$.*

  Une inclusion sur $\operatorname{Im} f$ fournit une inégalité sur $\operatorname{rg} f$.
- *Option 2 : avec le théorème du rang.*

  Une inclusion sur $\operatorname{Ker} f$ fournit une inégalité sur $\dim(\operatorname{Ker} f)$ et donc sur $\operatorname{rg} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f$.

SF 9 — Construire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ par « interpolation linéaire »

Lorsque E est de dimension finie pour construire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ répondant à des spécifications données on peut :

- Considérer une base $(b_1, \dots, b_n)$ de E adaptée au problème.
- Définir les vecteurs $f(b_1), \dots, f(b_n)$ de façon adéquate.

SF 10 — Calculer l'expression du projecteur p sur F parallèlement à G

On fixe $x \in E$ et on détermine la décomposition de x selon $F \oplus G$:

- On trouve l'unique couple $(y,z) \in E^2$ tel que : • $y \in F$ • $z \in G$ • $y + z = x$
- Dans ce cas : $p(x) = y$ (et $s(x) = y - z$ pour la symétrie)

SF 11 — Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur

On montre que : $f \circ f = f$.

SF 12 — Déterminer ou manipuler l'image d'un projecteur p

$y \in \operatorname{Im} p$ signifie : $p(y) = y$

SF 13 — Caractériser géométriquement un projecteur p

Il s'agit de chercher les sous-espaces $F = \operatorname{Inv} p$ et $G = \operatorname{Ker} p$:

- Pour trouver $F = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$, on résout l'équation $p(x) = x$ d'inconnue $x \in E$
- Pour trouver $G = \operatorname{Ker} p$, on résout l'équation $p(x) = 0$ d'inconnue $x \in E$

SF 14 — Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie

On montre que $f \circ f = \operatorname{Id}_E$.

SF 15 — Caractériser géométriquement une symétrie s

Il s'agit de chercher les sous-espaces $F = \operatorname{Inv} s$ et $G = \operatorname{AntiInv} s$:

- Pour trouver F, on résout l'équation $s(x) = x$.
- Pour trouver G, on résout l'équation $s(x) = -x$.