IV Rang d'une application linéaire

- **Cadre.** f est une application linéaire de E dans F.

1 Définition du rang

Définition 1

f est dite de *rang fini* si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie. En ce cas on pose :

- **Remarque.** Si E est de dimension finie muni d'une base $(b_1,\ldots,b_n)$ alors : $\operatorname{Im} f =$

Exemple 1 *Ex. 72.1, banque INP* — On suppose que $f(b_1)=\cdots=f(b_n)=v$ où $v\in F$ est fixé. Que vaut $\operatorname{rg}(f)$?

2 Théorème du rang

Théorème 1 : Forme géométrique du théorème du rang

On suppose que $\operatorname{Ker} f$ possède un supplémentaire S dans E. Alors :

Exercice 1 — Démontrer le théorème

Théorème 2 : Théorème du rang

Si E est de dimension finie :

Exercice 2 — Déduire ce théorème du précédent.

Exemple 2 *SF 8* — On suppose E de dimension n. Soit $f,g\in\mathscr{L}(E)$ tels que $g\circ f=0$. Montrer : $\operatorname{rg}(f)+\operatorname{rg}(g)\leq n$

Théorème 3 : « Miracle de la dimension finie »

On suppose E et F de même dimension finie. Il y a équivalence entre :

i) *ii)* *iii)*

Exercice 3 — Démontrer l'équivalence entre *i)* et *ii)* à l'aide de la formule du rang.

- **Remarque.** Le théorème s'applique en particulier si f est un endomorphisme en dimension finie

SF 6 : Montrer que f est un isomorphisme option 1

Exemple 3 — Montrer que $f:(x,y,z)\mapsto(y+z,z+x,x+y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 4 ♥ *cf. Ex. 87.1 et Ex. 90.1, banque INP* — Soient $x_1<x_2<\cdots<x_n$.
Montrer que l'application $\Phi : P\mapsto\big(P(x_1),\ldots,P(x_n)\big)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 5 — Soit $T\in GL_n(\mathbb{K})$, triangulaire supérieure. Montrer que T^{-1} est triangulaire supérieure.

3 Deux compléments

- **Rappel.** Soit $f\in\mathscr{L}(E)$. Par définition $f\in\operatorname{GL}(E)$ ssi il existe g tel que :

Théorème 4

Si E est de dimension finie et si $f\in\mathscr{L}(E)$, alors :

- $f\in\operatorname{GL}(E)\Leftrightarrow$
- $f\in\operatorname{GL}(E)\Leftrightarrow$

Exercice 4 — Démontrer le premier point.

Théorème 5 : Rang d'une composée

Soit $u\in\mathscr{L}(E,F)$ et $v\in\mathscr{L}(F,G)$ de rang fini. $v\circ u$ est de rang fini et

Exercice 5 *SF 8* ♥ — Montrer : **a)** $\operatorname{rg}(v\circ u)\leq\operatorname{rg}(v)$ **b)** $\operatorname{rg}(v\circ u)\leq\operatorname{rg}(u)$

Exercice 6 *SF 8* ♥ — On suppose E de dimension finie n. Soit $u,v\in\mathscr{L}(E)$. Montrer : $\operatorname{rg}(v\circ u)\geq\operatorname{rg}(v)+\operatorname{rg}(u)-n$.

Théorème 6 : Composer par un isomorphisme ne modifie pas le rang

On suppose E,F et G de dimension finie. Soient $f\in\mathscr{L}(E,F)$ et $g\in\mathscr{L}(F,G)$.

- Si f est un isomorphisme :
- Si g est un isomorphisme :

Exercice 7 — Démontrer le premier point du théorème.