Théorème 1 : Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{K}$ en escalier et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: 1. *Linéarité.* $\displaystyle\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$

2. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ • *Positivité.* Si $f \geq 0$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0.$ • *Croissance.* Si $f \leq g$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g.$

3. *Relation de Chasles.* Pour tout $c \in]a,b[$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$

4. *Fonctions « presque » égales.* Si f et g sont égales sauf en un nombre fini de points : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$

5. *Lien avec les parties réelles et imaginaires.* $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) + i \int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f)$

Linéarité.

Commençons par noter que la fonction $\lambda f + \mu g$ est en escalier. En effet, si l'on considère une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ adaptée à f et[1] à g alors, sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, f et g sont constantes donc $\lambda f + \mu g$ l'est aussi. Précisément, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, si on note y_i la valeur de f et z_i la valeur de g sur $]x_i, x_{i+1}[$, alors $\lambda f + \mu g$ vaut $\lambda y_i + \mu z_i$ sur cet intervalle de sorte que :

$$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(\lambda y_i + \mu z_i) = \lambda \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) y_i + \mu \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) z_i = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$$

Positivité, croissance

- *Positivité.* Supposons que $f \geq 0$ et montrons que $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0.$

  Soit $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision adaptée à f et y_i la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$. Puisque f est positive ou nulle, tous les $y_i \geq 0$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.

  Par conséquent : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{y_i}_{\geq 0} \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\geq 0} \geq 0$

- *Croissance.* Supposons que $f \leq g$ et montrons que $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g.$

  Notons pour cela que $g - f \geq 0$ donc, par positivité de l'intégrale : $\displaystyle\int_{[a,b]} (g - f) \geq 0.$

  Or, par linéarité $\displaystyle\int_{[a,b]} (g - f) = \int_{[a,b]} g - \int_{[a,b]} f$, d'où l'on déduit que $\displaystyle\int_{[a,b]} g \geq \int_{[a,b]} f.$

Relation de Chasles

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{K}$, en escalier et $c \in]a,b[$. Il s'agit de montrer : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$

Soit $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision adaptée à f.
Quitte à ajouter ce point à la subdivision, on peut supposer que $c = x_k$ pour un $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Ainsi $(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, c)$ et $(c, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ sont des subdivisons de $[a,c]$ et $[c,b]$, adaptées aux fonctions en escalier $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[c,b]}$. Notant y_i la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) y_i = \sum_{i=0}^{k-1} (x_{i+1} - x_i) y_i + \sum_{i=k}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) y_i = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

Fonctions presque égales.

Supposons f et g égales sauf en un nombre fini de points. La fonction $f - g$ est alors nulle sauf en un nombre fini de points donc elle est en escalier et $\displaystyle\int_{[a,b]} (f - g) = 0$ (par définition de l'intégrale d'une fonction en escalier).

Par linéarité : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g = 0.$

Lien avec les parties réelles et imaginaires.

La formule découle de la linéarité de l'intégrale vu que : $f = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f)$.

1. Une telle subdivision existe bien, il suffit de considérer une subdivision σ_1 adaptée à f, une subdivision σ_2 adaptée à g et de prendre la subdivision formée des points de σ_1 et des poins de σ_2.