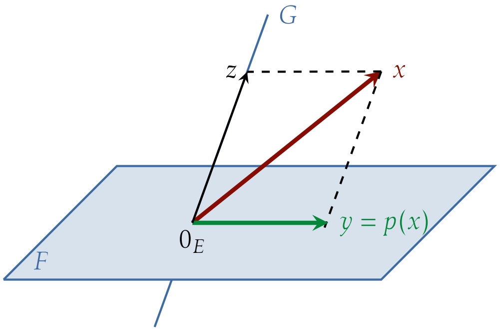
# I Projecteurs, symétries

- **Cadre.** On suppose : $E = F \oplus G$
- **Rappel.** Cela signifie :

## 1 Projecteurs

**Définition 1**

Le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$ est l'application :




**Exercice 1** SF 10 *Cf Ex. 71, banque INP* — On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ :
$F = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$

1. Vérifier que $F$ et $G$ sont supplémentaires
2. Soit $u = (x,y,z)$ et $p$ le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$. Déterminer les coordonnées de $p(u)$.

**Théorème 1**

1.
2.
3.

**Exercice 2** — Démontrer les points 1 et 3.

- **Remarque.** $\mathrm{Inv}\, p$ est l'ensemble des vecteurs invariants par $p$ :

**En pratique : image d'un projecteur**

$y \in \mathrm{Im}\, p$ signifie :

**Exercice 3** — Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, montrer en une ligne que $\mathrm{Inv} f$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**Théorème 2 : Caractérisation des projecteurs**

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

**Exercice 4** — Démontrer le théorème.

- **Remarque.** Lorsque $p \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $p \circ p = p$, la décomposition du vecteur $x \in E$ selon $\mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$ est donné par : $\boxed{x = \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}\, p} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \mathrm{Ker}\, p}}$

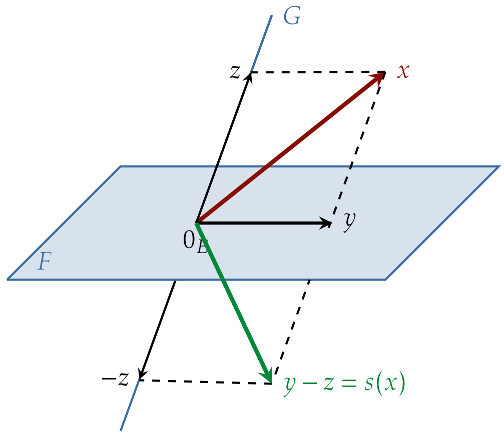
**SF 11 : Montrer que $f$ est un projecteur**

Si $f \in \mathscr{L}(E)$, il suffit de calculer $f \circ f$.

## 2 Symétries

**Définition 2**

La symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$ est l'application




**Exercice 5** *Suite de l'exercice 1* —
Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $s$ la symétrie par rapport à $F$ et parallèlement à $G$. Calculer $s(u)$.

- **Lien avec le projecteur $p$.**

**Théorème 3**

1.
2.
3.

**Exercice 6** — Démontrer le point 2.

- **Remarque.** $\mathrm{AntiInv}\, s$ est l'ensemble des vecteurs anti-invariants par $s$ :

**Théorème 4 : Caractérisation des symétries**

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

**SF 14 : Montrer que $f$ est une symétrie**

Si $f \in \mathscr{L}(E)$, il suffit de calculer $f \circ f$.

**Exercice 7** SF 14 ♥ — Etablir : $\mathscr{S}_n \oplus \mathscr{A}_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ à l'aide d'une symétrie.