II Noyau et image d'une application linéaire

- **Cadre.** f est une application linéaire de E dans F.

1 Définitions

Définition 1

- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de 0_F par f :
- L'*image* de f, notée $\operatorname{Im} f$, est l'ensemble :

- **Remarque.** • $x \in \operatorname{Ker} f$ signifie : • $y \in \operatorname{Im} f$ signifie :

Théorème 1

•

•

Exercice 1 — Démontrer le théorème.

- **Remarque.** Plus généralement, si E_1 est un sous-espace vectoriel de E et F_1 est un sous-espace vectoriel de F :
  - $f(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F.
  - $f^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E.

2 Noyau

SF 2 : Déterminer $\operatorname{Ker} f$

Exemple 1 — On note f l'application $(x,y,z) \mapsto (2x+y-z,\, x-y)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Trouver une base de $\operatorname{Ker} f$

Exemple 2 — Déterminer le noyau de l'endomorphisme D de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad D(P) = P'$.

Exemple 3 — Quel est le noyau de l'endomorphisme $T : f \mapsto f'' + 2f' + 3f$ de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

- **Remarque.** Pour $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $x \in \operatorname{Ker}\big(f - \lambda \operatorname{Id}_E\big)$ signifie :

Théorème 2 : Injectivité et noyau

Exercice 2 — Démontrer cette équivalence.

Exemple 4 — On considère l'endomorphisme $D : P \mapsto P'$ de $\mathbb{R}[X]$. L'endomorphisme D est-il injectif ?

SF 3 : Montrer que $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est injective

« Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0_F$ ... ... Donc $x = 0_E$. »

3 Image

SF 4 : Déterminer $\operatorname{Im} f$ (option n° 3)

Exemple 5 — Déterminer l'image de l'application linéaire $f : (x,y) \mapsto (x+2y,\, 2x+y,\, -x+y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$

Théorème 3 : Surjectivité et image

Exemple 6 — **a)** L'application f de l'**ex. 5** est-elle surjective ? **b)** L'endomorphisme D de l'**ex. 2** est-il surjectif ?

4 Exemples de raisonnements abstraits autour de l'image et du noyau

Deux résultats à retenir

♥ **Exercice 3** — Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espace vectoriels et soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$

1. Démontrer : $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
2. Montrer que : $g \circ f = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

Somme directe de noyaux

♥ **Exercice 4** — Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = \operatorname{Id}_E$.

a) Démontrer : $\operatorname{Ker}\big(f - \operatorname{Id}_E\big) \oplus \operatorname{Ker}\big(f^2 + f + \operatorname{Id}_E\big) = E$ **b)** Montrer que : $\operatorname{Im}\big(f^2 + f + \operatorname{Id}_E\big) = \operatorname{Ker}\big(f - \operatorname{Id}_E\big)$.