II Propriétés de l'intégrale

1 Justifier que $\int_a^b f$ est bien définie : *c'est justifier que f est continue par morceaux sur $[a,b]$*

Exemple 1 SF 4 *Premier cas typique : f est continue* — Justifier que $\int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie

Exemple 2 SF 4 *Deuxième cas typique : f est continue, sauf en un point « à problème »* —
Justifier que l'intégrale I est bien définie : **a)** $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$. **b)** $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$

2 Majorer/minorer des intégrales

- **Cadre.** • $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont continues par morceaux. • Les réels a et b sont tels que $\boxed{a \leq b}$
- **Objectif.** Exploiter les propriétés de positivité et croissance de l'intégrale.

• *Positivité.* Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$: $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$ • *Croissance.* Si $f \leq g$ sur $[a,b]$: $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$

Attention $a \leq b$ est indispensable.

SF 5 : pour majorer/minorer $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

1. On encadre « l'intérieur » *i.e.* on cherche un encadrement de la forme : $\forall t \in [a,b], \quad g(t) \leq f(t) \leq h(t)$
2. Par croissance de l'intégrale : $\int_a^b g \leq \int_a^b f \leq \int_a^b h.$

Exemple 3 SF 5 — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$. Etudier la monotonie de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 1 : Inégalité triangulaire

Soit $f \in \mathscr{CM}([a,b], \mathbb{K})$.

Exercice 1 SF 5 — Démontrer cette inégalité grâce à la propriété de croissance de l'intégrale.

Exemple 4 — Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^\pi \frac{t^n}{n!}\cos t\,\mathrm{d}t$. Montrer que $|I_n| \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$.

3 Déduire des informations sur f à partir d'une hypothèse sur $\int_a^b f$

Théorème 2

On suppose que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

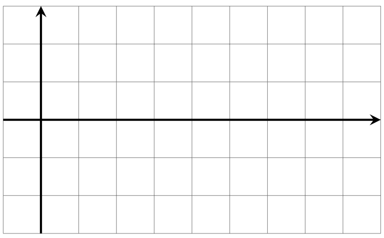
Si : *i)* *ii)* *iii)*

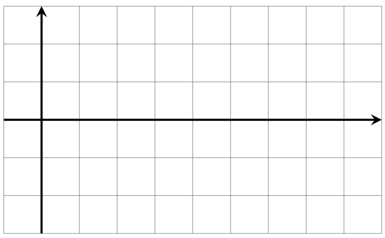
Alors :

- **Conséquence.** Si $f \geq 0$ et si f est continue et n'est pas la fonction nulle, alors :

Attention La conclusion est fausse si l'une des deux conditions $i)$ ou $ii)$ n'est pas vérifiée.

Exercice 2 *Ex. 79.1, banque INP* — Démontrer le théorème 2





Exercice 3 — Soit $f \in \mathscr{CM}([a,b], \mathbb{R}_+)$ et $x_0 \in]a,b[$. Montrer que si $f(x_0) > 0$ et f est continue en x_0 alors $\int_a^b f > 0$

Exemple 5 SF 7 — Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue, telle que $\int_0^1 f = \int_0^1 f^2 = 1$. Montrer : $\forall t \in [0,1], \quad f(t) = 1$.

4 Application au calcul de limites d'intégrales

- **Objectif.** Etudier la limite d'une suite (I_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $I_n = \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 6 SF 5 SF 6 — Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: **a)** $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) e^{-nt}\,\mathrm{d}t$ **b)** $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$

Exemple 7 ♥ SF 5 SF 6 — Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue par morceaux. Montrer : $\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Exemple 8 SF 5 SF 6 — Etudier la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $H : x \mapsto e^{-x}\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t.$

Exemple 9 ♥ SF 1 SF 6 — Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t = 0.$