III Familles génératrices

1 Familles génératrices finies

- **Cadre.** • E est un $\mathbb{K}$-e.v. • Dans les parties 1 et 2 $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ est une famille finie de vecteurs de E.

Définition 1

La famille $\mathscr{F}$ est *génératrice* de E (ou *engendre* E) si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ *i.e.* :

•

ou encore •

Exemple 1 — **1.** Une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ est :

2. Une famille génératrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est :

Exemple 2 — Montrer que $\big((1,0),(0,1)\big)$ engendre $\mathbb{R}^2$.

Exemple 3 — **a)** Le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$ est engendré par : **b)** Le $\mathbb{C}$-e.v. $\mathbb{C}$ est engendré par :

- **Remarque.** Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est encore génératrice de E

Théorème 1

Soit $\vec{u}_{n+1} \in E$.
Si : • $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n, \vec{u}_{n+1})$ est génératrice de E •
alors $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est encore génératrice de E

Exercice 1 ♥ — Démontrer le théorème

En pratique : « chasser » dans un Vect

Exemple 4 — Dans $\mathbb{R}[X]$, on pose : $F = \mathrm{Vect}(1, X, 1+X, 2X-3, 3X, 0)$. Montrer que : $F = \mathrm{Vect}(1, X)$

En pratique : pour trouver une famille génératrice de F

Exemple 5 — Trouver une famille génératrice de $F = \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ \big|\ x-2y-z=0 \quad \text{et} \quad x-y+t=0\Big\}$

2 Bases

Définition 2

- La famille $\mathscr{F}$ est une *base de E* si tout vecteur de E est *d'une manière unique* combinaison linéaire de $\mathscr{F}$
- Ou encore :

- **Vocabulaire.** La famille $(\alpha_i)_{1 \le i \le n}$ est la famille des *coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{F}$*
- **Remarque.** La famille vide est une base de $\big\{\vec{0}_E\big\}$

Exemple 6 — Montrer que **a)** $\big((1,1),(1,-2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ **b)** $(X^2+X, X^2+1, X+1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

3 Généralisations : familles génératrices quelconques / parties génératrices

- **Cadre.** $\mathscr{F} = (\vec{u}_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs de E indexée par un *ensemble quelconque* I (par ex. $I = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$)

Définition 3

- $\vec{x} \in E$ est *combinaison linéaire* de $\mathscr{F}$ s'il est combinaison linéaire *d'une sous-famille finie* de $\mathscr{F}$.
- On définit de même le sous-espace engendré $\mathrm{Vect}\mathscr{F}$ comme l'ensemble des combinaisons linéaires de $\mathscr{F}$
- La famille $\mathscr{F}$ est dite *génératrice de E* si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$.
- La famille $\mathscr{F}$ est une base de E si tout vecteur de E est d'une manière unique combinaison linéaire de $\mathscr{F}$

- **Vocabulaire.** Une famille $(\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ est *presque nulle* si tous les α_i sont nuls *sauf un nombre fini d'entre eux*.
- Un vecteur $\vec{x} \in E$ est ainsi C.L. de $\mathscr{F}$ s'il existe une famille $(\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ *presque nulle* telle que : $\vec{x} = \sum\limits_{i \in I} \alpha_i \vec{u}_i$
- Lorsque $\mathscr{F}$ est une base, la famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ est unique, appelée *famille des coordonnées* de $\vec{x}$ dans $\mathscr{F}$

Exemple 7 — La famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. Tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ pour une unique famille $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, **presque nulle** : la famille de ses coefficients. Cette somme est **FINIE**

Exercice 2 — Montrer que $\mathrm{Vect}(\vec{u}_i)_{i \in I}$ est aussi l'intersection de tous les sous-espaces de E contenant $\{\vec{u}_i\}_{i \in I}$

Définition 4

- Soit A une partie de E. On définit $\mathrm{Vect}A$ comme l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A. $\mathrm{Vect}A$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.
- La partie A est dite *génératrice* de E lorsque : $\mathrm{Vect}A = E$.

Exercice 2 — Montrer que $\text{Vect}(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est aussi l'intersection de tous les sous-espaces de E contenant $\{\vec{u}_i\}_{i\in I}$

Correction. Soit $(F_j)_{j\in J}$ la famille de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent $\{\vec{u}_i\}_{i\in I}$.
Posons : $\quad F = \bigcap_{j\in J} F_j \quad$ et montrons que $F = \text{Vect}(\vec{u}_i)_{i\in I}$ par double inclusion.

- *Montrons que* $F \subset \text{Vect}(\vec{u}_i)_{i\in I}$.
  On sait que $\text{Vect}(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient $\{\vec{u}_i\}_{i\in I}$.
  C'est donc un élément de la famille $(F_j)_{j\in J}$: il existe $j_0 \in J$ tel que $\text{Vect}(\vec{u}_i)_{i\in I} = F_{j_0}$.
  Ainsi : $\quad F = \bigcap_{j\in J} F_j \subset F_{j_0} = \text{Vect}(\vec{u}_i)_{i\in I}$
- *Montrons que* $\text{Vect}(\vec{u}_i)_{i\in I} \subset F$.
  On sait que F est un sous-espace vectoriel de E (en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels de E).
  De plus F contient $\{\vec{u}_i\}_{i\in I}$ (car chaque F_j contient $\{\vec{u}_i\}_{i\in I}$).
  Par théorème, F contient donc $\text{Vect}(\vec{u}_i)_{i\in I}$.