1 Montrer qu'une application est linéaire

Définition 1

Une application $f : E \to F$ est *linéaire* si elle préserve les combinaisons linéaires *i.e.* si :

- **Notation.** L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté :
- **Remarque.** Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors f est un morphisme de groupes de $(E,+)$ dans $(F,+)$ donc :
- **Vocabulaire.** On appelle :
  - *Endomorphisme* de E toute application linéaire de E dans E. On note $\mathscr{L}(E)$ au lieu de $\mathscr{L}(E,E)$
  - *Isomorphisme* de E sur F, toute application linéaire bijective de E sur F.
  - *Automorphisme* de E tout endomorphisme bijectif de E, on note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble de ces automorphismes
  - *Forme linéaire* de E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ *i.e.* tout élément de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$.
- **Exemples particuliers.**
  - L'application nulle $x \mapsto 0_F$ de E dans F est :
  - L'identité de E, Id_E :
  - Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, l'homothétie de rapport λ est l'endomorphisme :

SF 1 : Montrer que f est linéaire

Exemple 1 — **1.** Montrer que l'application $f : (x,y) \mapsto (y, 2x-3y, x+2y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ est linéaire.
2. Montrer que l'application $D : P \mapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que l'application $I : f \mapsto \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.
4. Montrer que l'application $T : f \mapsto f'' + 2f' + 3f$ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exemple 2 — Les applications suivantes ne sont pas linéaires : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, 1+y) \end{array}$ $\quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x^2, y) \end{array}$

Exercice 1 — Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant : $\forall x \in E, \quad \exists \lambda \in \mathbb{K} \mid h(x) = \lambda x.$ Montrer que h est une homothétie.

2 Opérations sur les applications linéaires

Théorème 1

$\mathscr{L}(E,F)$ est :

Théorème 2

Si E et F sont de dimension finie alors $\mathscr{L}(E,F)$ l'est aussi et

Exercice 2 — Démontrer ce théorème.

Théorème 3 : Composée

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ alors :

Exercice 3 — Démontrer ce résultat.

- **Remarque.** $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est :
- **Conséquence.** Si $f, g \in \mathscr{L}(E)$ commutent, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

•

•

Exemple 3 — On considère les endomorphismes $f : P \mapsto P - P'$ et $D : P \mapsto P'$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer : $f \circ \sum_{k=0}^{n} D^k$.

Théorème 4 : Réciproque

Si f est un isomorphisme de E sur F, alors :

Exercice 4 — Démontrer ce résultat.

Exemple 4 SF 7 — Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - 2f + 3\mathrm{Id}_E = 0$. Montrer que $f \in \mathrm{GL}(E)$ et déterminer f^{-1}.

- **Remarque.** $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est :