I Définition de l'intégrale

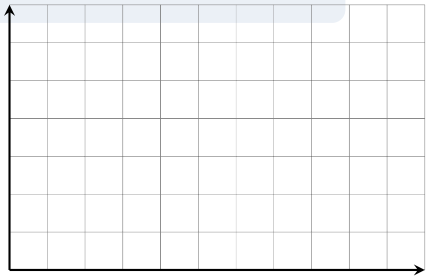
- **Cadre.** • $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ avec $a<b$. • $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Intégrale d'une fonction en escalier

- **Vocabulaire.** Une *subdivision* de $[a,b]$ est une famille $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que : $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.

Définition 1

Une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ est *en escalier* s'il existe une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[a,b]$ (dite *adaptée à* f) telle que :



Définition 2

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ en escalier et $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée à f.
Pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$, on note y_i la valeur de f sur $]x_i,x_{i+1}[$. On définit l'*intégrale de f sur $[a,b]$* par : $\displaystyle\int_{[a,b]} f \underset{\text{déf.}}{=}$

Exercice 1 — Montrer que $S(\sigma)=\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)y_i$ ne dépend pas de la subdivision $\sigma=(x_i)_{0\leq i\leq n}$ adaptée à f

Exercice 2 — Soit $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ en escalier. Montrer que : $\left|\int_{[a,b]} f\right|\leq(b-a)\,\|f\|_\infty$

Exemple 1 — Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer $\int_0^{n+1}\lfloor t\rfloor\,\mathrm{d}t$.

Théorème 1 : Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

Soit $f,g:[a,b]\to\mathbb{K}$ en escalier et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$: 1. *Linéarité.*

2. Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ • *Positivité.* • *Croissance.*

3. *Relation de Chasles.* Pour tout $c\in\,]a,b[$:

4. *Fonctions « presque » égales.* Si f et g sont égales sauf en un nombre fini de points :

5. *Lien avec les parties réelles et imaginaires.*

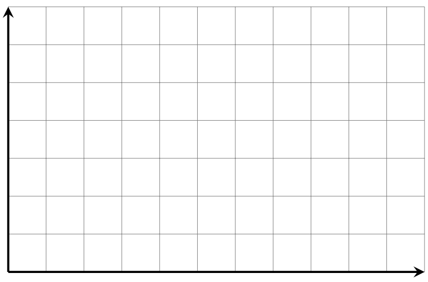
Exercice 3 — Etablir la propriété de linéarité.

2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 3

$f:[a,b]\to\mathbb{K}$ est *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ (dite *adaptée à* f) telle que pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$:

-
-



- **Notation.** L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ est noté $\mathscr{CM}([a,b],\mathbb{K})$

Exercice 4 — Soit $f:[a,b]\to\mathbb{K}$, continue par morceaux. Montrer que f est bornée sur $[a,b]$.

Exercice 5 — Soit $f:[a,b]\to\mathbb{K}$, continue par morceaux.
On admet provisoirement qu'il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier telle que $\|f-\varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Montrer que la suite $\left(\int_{[a,b]}\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite ne dépend pas du choix de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 4

Soit $f\in\mathscr{CM}([a,b],\mathbb{K})$. On définit l'*intégrale de f* sur $[a,b]$ par :

- **Remarque.** Si f est en escalier, les deux définitions de $\int_{[a,b]} f$ coïncident.
- **Conséquence.** Les propriétés du théorème 1 s'étendent à l'intégrale des fonctions continues par morceaux

Exercice 6 — Démontrer la propriété de linéarité pour l'intégrale des fonctions de $\mathscr{CM}([a,b],\mathbb{K})$

- **Notation définitive.** Soit $f\in\mathscr{CM}([a,b],\mathbb{K})$ et $\alpha,\beta\in[a,b]$:

• si $\alpha<\beta$: $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t \underset{\text{déf.}}{=} \int_{[\alpha,\beta]} f$ • si $\alpha>\beta$: $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t \underset{\text{déf.}}{=} -\int_{[\beta,\alpha]} f$ • si $\alpha=\beta$: $\displaystyle\int_\alpha^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t \underset{\text{déf.}}{=} 0$