Projecteurs, symétries définis explicitement

1 SF 10 Dans $\mathbb{R}^3$, on pose

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ x+2y+z=0 \quad \text{et} \quad 2x+y-z=0\right\}$$

et : $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ x+y+2z=0\right\}$

1. Donner une base de F puis vérifier que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
2. Soient $u=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et p le projecteur sur F et parallèlement à G. Calculer $p(u)$.

2 SF 10 Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose :

$$F = \mathbb{R}_1[X] \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(X^2+X+1)$$

1. Vérifier que F et G sont supplémentaires
2. Soient $P = aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X]$ et f la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Exprimer $f(P)$ en fonction de a, b et c.

3 SF 10 Soit $m \in \mathbb{R}$, fixé. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1)=0\} \quad \text{et} \quad G_m = \mathrm{Vect}(X-m)$$

1. Trouver les valeurs de m pour lesquelles F et G_m sont supplémentaires.
2. On suppose F et G_m sont supplémentaires.
   Soient $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et f le projecteur sur G_m et parallèlement à F. Exprimer $f(P)$ en fonction de P.

4 SF 14 SF 15 Soit f l'application qui à chaque polynôme $P \in \mathbb{K}_4[X]$ associe le polynôme : $f(P) = X^4 P\left(\dfrac{1}{X}\right)$

a) Montrer que f est une symétrie.

b) Trouver une base de $F = \mathrm{Inv} f$ et $G = \mathrm{AntiInv} f$.

5 SF 11 SF 13 Soit $B \in \mathbb{K}[X]$ non constant. On considère l'application f qui, à $A \in \mathbb{K}[X]$, associe le reste de la division euclidienne de A par B.

1. Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{K}[X]$.
2. Déterminer $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$.

Projecteurs et symétries abstraits

6 SF 11 SF 12 Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que p et q commutent.

a) Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E.

b) Etablir : $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$.

c) Etablir : $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, q$.

7 SF 11 SF 12 Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que : $p \circ q = 0$.

1. Montrer que $r = p+q-q \circ p$ est un projecteur.
2. a) Montrer que : $\mathrm{Ker}\, r = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$.
   b) Montrer que : $\mathrm{Im}\, r = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$.
   c) Montrer que la somme $\mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$ est directe.

8 SF 11 SF 12 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^n = \mathrm{Id}_E$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Soit V un sous-espace vectoriel de E stable par u et p un projecteur tel que $\mathrm{Im}\, p = V$.

On pose : $q = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}$.

a) Montrer que : $q \circ u = u \circ q$

b) Montrer que : $\mathrm{Im}\, q \subset V$

c) Montrer que : $p \circ q = q$

d) Montrer que q est un projecteur.

9 SF 11 SF 12 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p,q \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre :

i) $p = p \circ q$ et $q = q \circ p$

ii) p et q sont des projecteurs et $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}\, q$.

10 SF 11 SF 12 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur de E si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
2. Montrer que, dans ce cas :
   $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$ et $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$

11 SF 11 SF 12 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre :

i) $f^2 = 0$

ii) Il existe deux projecteurs p et q de même image tels que $f = p - q$.

12 SF 12 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F possède un supplémentaire G de dimension finie. Montrer que tout supplémentaire H de F est de dimension finie et que $\dim H = \dim G$.

Indication : Considérer le projecteur sur G parallèlement à F

13 SF 12 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E. Montrer que $\mathrm{Id}_E + \lambda p$ est un automorphisme de E pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{-1\}$.

14 SF 11 SF 9 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ une base de E.
Pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$, on note $f_{i,j}$ l'endomorphisme de E tel que : $f_{i,j}(b_j) = b_i$ et $f_{i,j}(b_k) = 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}$.

1. Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$.
   On note Φ_u l'endomorphisme $f \mapsto u \circ f \circ u^{-1}$ de $\mathscr{L}(E)$.
   Pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$, on pose $g_{i,j} = \Phi_u(f_{i,j})$ et $c_i = u(b_i)$.
   a) Calculer $g_{i,j}(c_j)$ pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$.
   b) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, montrer que $g_{i,i}$ est un projecteur et déterminer son image.
2. Soit Φ un automorphisme de $\mathscr{L}(E)$ tel que :
   $$\forall f,g \in \mathscr{L}(E), \quad \Phi(f \circ g) = \Phi(f) \circ \Phi(g)$$
   Montrer qu'il existe $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $\Phi = \Phi_u$.