1

1. Une base de F est $\big((1,-1,1)\big)$. On vérifie ensuite que $\dim F + \dim G = 3$ et $F \cap G = \{(0,0,0)\}$.

2. On cherche λ, a, b, c tels que : $\begin{cases} \lambda(1,-1,1) + (a,b,c) = (x,y,z) \\ (a,b,c) \in G \end{cases}$

On résout le système, puis $p(u) = \lambda(1,-1,1)$ (composante de u selon F).

2

1. Deux possibilités

- On vérifie que $\dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}_2[X]$ et que $F \cap G = \{0\}$.
- On utilise le théorème de division euclidienne.

2. On cherche α, β, λ tels que :
$$(\alpha X + \beta) + \lambda(X^2 + X + 1) = aX^2 + bX + c$$
On trouve α, β, λ en identifiant les coefficients ou en posant la division euclidienne de P par $X^2 + X + 1$.
Ensuite par définition de f en tant que symétrie :
$$f(P) = (\alpha X + \beta) - \lambda(X^2 + X + 1)$$
Réponse : $f(P) = -aX^2 + (b-2a)X + (c-2a)$.

3

1. Distinguer 2 cas :

- *Pour $m = 1$.* G_1 et F ne sont pas en somme directe.
- *Pour $m \neq 1$.* On vérifie que : $\dim F + \dim G_m = \dim \mathbb{R}_2[X]$ et que $F \cap G_m = \{0\}$.

2. Par définition, $f(P) = \lambda(X - m)$ où λ est le coefficient de la décmposition
$$(\star) P(X) = Q(X) + \lambda(X - m) \quad \text{et} \quad Q \in F$$

- *Première méthode.* On calcule explicitement $Q = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ en résolvant le système
$$\begin{cases} \alpha X^2 + \beta X + \gamma + \lambda(X - m) = aX^2 + bX + c \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$
- *Deuxième méthode BEAUCOUP plus efficace.* On évalue $(\star)$ en 1 sachant que $Q(1) = 0$.

Réponse : $f(P) = P(1)\dfrac{X - m}{1 - m}$.

4

1. Vérifier que :

- f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_4[X]$
- $f\big(f(P)\big) = P$ pour tout $P \in \mathbb{K}_4[X]$.

2. Fixer $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$ et :

- Pour trouver une base de F résoudre $f(P) = P$.
  On trouve $F = \mathrm{Vect}\big(X^4 + 1, X^3 + X, X^2\big)$
- Pour trouver une base de G résoudre $f(P) = -P$
  On trouve $G = \mathrm{Vect}\big(X^4 - 1, X^3 - X\big)$

5

1.
- *Linéarité.* Elle repose sur la propriété d'unicité du couple (Q, R) fourni par la division euclidienne. Précisément, étant donnés $A_1, A_2 \in \mathbb{K}[X]$ leurs images $f(A_1)$ et $f(A_2)$ vérifient :
$$A_1 = BQ_1 + f(A_1) \quad \text{et} \quad A = BQ_2 + f(A_2)$$
Combiner ces deux égalités pour former **la** division euclidienne de $(\lambda A_1 + \mu A_2)$ par B et identifier le reste obtenu avec $f(\lambda A_1 + \mu A_2)$.
- $f \circ f = f$ Etant donné $A \in \mathbb{K}[X]$, il s'agit de montrer que $R = f(A)$ vérifie $R = f(R)$.
Pour cela, noter que $\deg R < \deg B$ donc la division euclidienne de R par B est « simple »

2.
- *Noyau.* $\operatorname{Ker} f = B\mathbb{K}[X]$
- *Image.* Montrer que $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ où $n = \deg B$ en procédant par double inclusion.

6

a) Montrer que $(p \circ q)^2 = p \circ q$.

b) Procéder par double inclusion.

- Les inclusions $\operatorname{Im} p \circ q \subset \operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} q \circ p \subset \operatorname{Im} q$ sont toujours vraies et ici $q \circ p = p \circ q$.
- Pour l'inclusion réciproque, fixer un $y \in \operatorname{Im} p \circ \operatorname{Im} q$ et se souvenir que puisque p et q sont des projecteurs, cela signifie que $p(y) = y$ et que $q(y) = y$.

c) Procéder par double inclusion.

- Les inclusions $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} q \circ p$ et $\operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} p \circ q$ sont toujours vraies et ici $q \circ p = p \circ q$.
- Pour l'inclusion réciproque, fixer un $x \in \operatorname{Ker}(p \circ q)$ et se souvenir que la décomposition de x selon $\operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$ est $x = x - p(x) + p(x)$.
  Vérifier que cette décomposition convient *i.e.* que $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$ et que $p(x) \in \operatorname{Ker} q$

7

1. Calculer $r \circ r$ en utilisant : $p \circ p = p$, $q \circ q = q$ et $p \circ q = 0$

2. a) Procéder par double inclusion :

- $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} r$ est simple.
- Pour montrer $\operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.
  Si $x \in \operatorname{Ker} r$ on a
  $$p(x) = q(x) - q \circ p(x)$$
  Cette égalité permet de prouver que $x \in \operatorname{Ker} p$:
  - Ou bien à partir de $p(x) \in \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$.
  - Ou bien en appliquant p à l'égalité.

  Sachant que $x \in \operatorname{Ker} p$, l'égalité $p(x) = q(x) - q \circ p(x)$ assure que $q(x) = 0$.

b) Procéder par double inclusion :

- $\operatorname{Im} r \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ est simple via la définition de r.
- Pour montrer $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} r$.
  Si $x = y + z \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ utiliser le fait que $p(y) = y$, $q(z) = z$ (et $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$) pour montrer que $r(y) = y$ et $r(z) = z$.

c) $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p$.

8

a) Calculer $q \circ u$: remplacer q par sa définition, réindexer la somme $(\ell = k - 1)$ et sortir le premier terme en n'oubliant pas que $\mathrm{Id}_E = u^n$.

b) Vu la définition de q il suffit de montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et tout $x \in V$, $u^k \circ p \circ u^{n-k}(x) \in V$: il suffit d'utiliser les hypothèses faites sur u et p.

c) Pour $x \in E$, il s'agit de montrer que le vecteur $y = q(x)$ est invariant par p. Noter que $V = \operatorname{Im} p$ et que p est un projecteur.

d) Calculer $q \circ q$ en remplaçant le facteur de gauche par la somme : $q \circ q = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k} \circ q$
puis utiliser les résultats de a) et c)

9

- $i) \implies ii)$ Montrer que $p \circ p = p$ en composant par la droite l'égalité $p = p \circ q$ par p.
Pour l'égalité des noyaux, procéder par double inclusion.

- $ii) \implies i)$ Pour montrer que $p = p \circ q$. Fixer $x \in E$ et écrire $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Im} q$ et $z \in \operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} p$ et montrer que $p(x) = p \circ q(x)$.

10 **1.** Si $p \circ q = q \circ p = 0$, on obtient directement :

$$(p+q)^2 = p+q$$

Réciproquement, si $p+q$ est un projeteur, alors l'égalité $(p+q)^2 = p+q$ assure que : $\quad (\star)\ p \circ q = -q \circ p$. Deux possibilités ensuite :

- On peut composer $(\star)$ par p (à droite et à gauche) et en utilisant le fait que $p^2 = p$, $q^2 = q$ et $qp = -pq$, on obtient $p \circ q = -p \circ q$.
- On peut aussi utiliser $(\star)$ pour montrer : $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$

2. Procéder par double inclusion pour chaque égalité. Pour chacune, utiliser le fait que $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} q$ et $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$ (qui découlent de ce que $p \circ q = q \circ p = 0$).

11 Pour le sens $i) \implies ii)$ on peut par exemple considérer un supplémentaire S de $\operatorname{Ker} f$ dans E et définir les restrictions de p et q sur $\operatorname{Ker} f$ et sur S.

12 Notant p le projecteur sur G et parallèlement à F, montrer que $\varphi : \begin{array}{rcl} H & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & p(x) \end{array}$ est un isomorphisme.

13 Pour montrer la bijectivité de $f = \mathrm{Id}_E + \lambda p$ on peut :

- *Option 1*. Montrer que f est injectif et surjectif :
  - *Injectivité*. On peut remarquer que si $x \in \operatorname{Ker} f$ alors $x \in \operatorname{Im} p$ puis utiliser ensuite le fait que $p(x) = x$.
  - *Surjectivité*. On peut montrer que $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Im} f$ puis que $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} f$ (dès lors $\operatorname{Im} f$ contient $\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} p = E$).
- *Option 2*. Trouver g tel que $f \circ g = g \circ f = 0$.
  Traiter à part le cas $\lambda = 0$ et si $\lambda \neq 0$, remplacer $p = \dfrac{f - \mathrm{Id}_E}{\lambda}$ dans l'égalité $p^2 = p$.

14 **1.**

2. Poser $c_i = g_{i,1}(b_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et montrer que $(c_1, \ldots, c_n)$ est une base de E.
La question **1.** permet de savoir comment définir u à partir des bases $(b_1, \ldots, b_n)$ et $(c_1, \ldots, c_n)$.
Montrer alors que : Φ et Φ_u coïncident en les $f_{i,j}$.