Exercices de base autour de la linéarité

1 Dans chacun des cas suivant, montrer que l'application f n'est pas linéaire :

a) $f: \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, x-y+2)\end{array}$ **b)** $f: \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, xy)\end{array}$

c) $f: \begin{array}{ccc}\mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P'-P^2\end{array}$ **d)** $f: \begin{array}{ccc}\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & \exp\circ u\end{array}$

2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\left(x, f(x), f^2(x)\right)$ est une famille libre.

Déterminer l'image et le noyau

3 SF 2 SF 4 Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes (où $\alpha \in \mathbb{R}$) :

a) $f: \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z,\ x-y,\ 2x+z)\end{array}$

b) $f: \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y+z,\ 3x+y-z,\ x+y+z,\ y-2z)\end{array}$

c) $f_\alpha: \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+y+\alpha z+t,\ x+z+t,\ y+z)\end{array}$

4 SF 1 SF 2 SF 4 Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad f(P) = X(P'(X+1) - P'(1))$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Déterminer une base de l'image de f.

5 SF 1 SF 2 SF 4 SF 5 *Ex. 60, banque INP* Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $f : M \mapsto AM$ l'application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Trouver une base de $\operatorname{Ker} f$. f est-elle surjective ?
3. Trouver une base de $\operatorname{Im} f$.
4. Montrer : $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$

6 SF 2 SF 4 SF 5 On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$
$$\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\Delta_n = \Delta_{|\mathbb{R}_n[X]}$.

1. Déterminer $\operatorname{Ker} \Delta$.
2. Déterminer $\operatorname{Im} \Delta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire que Δ est surjectif.

7 SF 1 SF 2 Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, premiers entre eux avec B non constant. On considère l'application f qui, à $P \in \mathbb{K}[X]$, associe le reste de la division euclidienne de AP par B. Montrer que f est linéaire et déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

Bijectivité

8 SF 1 SF 7 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x+y, x-y)$$
Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer son automorphisme réciproque.

9 SF 1 SF 6 On considère l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par $f(P) = \left(P(0), P'(0), \dots, P^{(n)}(0)\right)$. Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

10 SF 6 *Ex. 59, banque INP.* Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif.
2. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Exprimer, en fonction de Q, le polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = Q$. *Indication* : Exprimer $P - P^{(n+1)}$ en fonction de $Q, Q', \dots, Q^{(n)}$.
3. Montrer que si $Q \geq 0$ alors $P \geq 0$.

11 SF 6 Soient a, b deux réels distincts. Montrer que l'application $\varphi : P \mapsto P(X+a) + P(X+b)$ est un automorphisme :
a) de $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. **b)** de $\mathbb{R}[X]$.

12 SF 5 Soient $A \in GL_n(\mathbb{K})$. On note $\mathbb{K}[A]$ l'ensemble des *polynômes en A* : $\mathbb{K}[A] = \left\{P(A)\ ;\ P \in \mathbb{K}[X]\right\}$

1. Montrer que $\mathbb{K}[A]$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que A^{-1} est un polynôme en A.
Indication : Considérer l'application $T : M \mapsto AM$ sur $\mathbb{K}[A]$.

Autour du rang

13 SF 8 Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que : $f \circ g \circ f = g$ et $g \circ f \circ g = f$.
a) Montrer que : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$
b) Montrer que : $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(g) = \operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f \circ g)$

14 SF 8 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que :
a) $\operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$. **b)** $|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leq \operatorname{rg}(f-g)$.

15 SF 8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E vérifiant $f^3 = 0$.
a) ⋆ Montrer que : $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(f^2) \leq n$.
b) ⋆⋆⋆ Montrer que : $2\operatorname{rg}(f^2) \leq \operatorname{rg}(f)$.

16 SF 8 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E. Etablir l'équivalence :
$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \iff f^2 = 0 \quad \text{et} \quad n = 2\operatorname{rg}(f)$$

17 SF 8 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que :
$$\dim(\operatorname{Ker}(g \circ f)) \leq \dim(\operatorname{Ker} g) + \dim(\operatorname{Ker} f)$$
Indication : Considérer la restriction : $\varphi = g_{|\operatorname{Im} f}$

18 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que : $f + g \in GL(E)$ et $g \circ f = 0$. Montrer que : $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = n$.

19 SF 9 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie non nulle et $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$. Montrer que $\operatorname{rg}(g) \leq \operatorname{rg}(f)$ si et seulement si il existe $u \in GL(F)$ et $v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ g = f \circ v$.

Applications linéaires et supplémentaires

20 *Adapté de Ex. 64, banque INP*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. On suppose dans cette question E de dimension finie. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :
i) $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$ *ii)* $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$ *iii)* $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$
2. Dans le cas général, montrer que :
a) $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\} \iff \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$.
b) $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \iff \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$.

21 *Ex. 62, banque INP.*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.
On suppose que : $f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E = 0$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$.
2. On suppose ici E de dimension finie.
   Montrer : $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$.
3. Montrer que $f \in GL(E)$ et exprimer f^{-1} en fonction de f

22 *Adapté de Ex. 93, banque INP*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.
On suppose que : $f^3 + f^2 + f = 0$.

a) Montrer que : $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$

b) Montrer que : $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$

23 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que :
$$f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g$$
Montrer que : **a)** $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g$ **b)** $f(\mathrm{Im}\, g) = \mathrm{Im}\, f$

24 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$.
On suppose f injectif et g surjectif.
Démontrer l'équivalence entre les assertions suivantes :
i) $g \circ f$ est un automorphisme *ii)* $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, g$

25 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.
Montrer l'équivalence entre les assertions :

i) $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f$

ii) $f^2 = 0$ et $\exists g \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ g + g \circ f = \mathrm{Id}_E$

26 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(f) = 0$ et pour lequel $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$.

Puissances d'endomorphismes

27 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$.
On suppose que : $g \circ f - f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g \circ f^n - f^n \circ g = n f^{n-1}$.
2. Montrer que la famille $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre.

28 *SF 7* Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.
On suppose qu'il existe $n \geq 2$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1. Montrer que f n'est pas injectif.
2. Montrer que $\mathrm{Id}_E - f$ est un automorphisme.

29 *SF 8* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. On pose : $n_k = \dim \mathrm{Ker}\, f^k$ et $d_k = n_{k+1} - n_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

1. Montrer que la suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2. **a)** Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad d_k = \dim\left(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f^k\right)$.
   b) En déduire que la suite $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

30 *SF 5* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u_1, \ldots, u_n$ des endomorphismes nilpotents de E qui commutent deux à deux. Que vaut $u_n \circ \cdots \circ u_1$?

31 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ défini pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ par : $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

a) Montrer que $\varphi^n = 0$.

b) En déduire : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X+k) = 0.$

32 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $g \in \mathscr{L}(E)$ est bijectif et commute avec f, alors $f + g$ est bijectif. *Indication : Ecrire une égalité de la forme* $f^{2n+1} + g^{2n+1} = (f+g) \circ h = h \circ (f+g)$ *avec* $h \in \mathscr{L}(E)$.

33 *SF 5* Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$. Montrer que $F \cap GL(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$

Théorème d'« interpolation linéaire »

34 *SF 9* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1. ★ Montrer l'existence d'un élément $x_0 \in E$ tel que $\mathscr{B} = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
2. ★★★ Soit g un endomorphisme de E commutant avec f. Montrer que g appartient à $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, \cdots, f^{n-1})$. On pourra d'abord écrire $g(x_0)$ en fonction des éléments de la base $\mathscr{B}$.

35 *SF 9* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant : $\forall x \in E, \quad \exists p_x \in \mathbb{N} \mid f^{p_x}(x) = 0$.

1. Montrer que f est nilpotent.
2. Trouver un contre-exemple à **1.** dans le cas où E n'est pas de dimension finie.

36 *SF 9* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $2n$. Montrer qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f$.

37 *SF 9* Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Trouver une condition nécessaire et suffisante simple sur F et G pour qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $F = \mathrm{Ker}\, f$ et $G = \mathrm{Im}\, f$.

38 *SF 9* Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante simple sur F et G pour qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f(F) = G$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante simple sur F et G pour qu'il existe $f \in GL(E)$ tel que $f(F) = G$.

Formes linéaires

39 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ et tout vecteur $a \in E$ on note $\varphi \otimes a$ l'application $x \mapsto \varphi(x)a$ de E dans E.

a) Montrer que si φ et a sont non nuls, alors $\varphi \otimes a$ est un endomorphisme de E et : $\mathrm{rg}(\varphi \otimes a) = 1$.

b) Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(v) = 1$. Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ et $a \in E$ non nuls tels que : $v = \varphi \otimes a$.

40 *SF 9* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 3$, $a \in E \setminus \{0_E\}$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(a, x, u(x))$ est liée. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ tels que pour tout $x \in E$: $u(x) = \alpha x + \varphi(x) a$.