1

2 Etant donnés α, β, γ tels que

$$(\star) \quad \alpha x + \beta f(x) + \gamma f^2(x) = 0$$

- appliquer d'abord f^2 pour montrer que $\alpha = 0$
- appliquer ensuite f pour montrer que $\beta = 0$

3 Appliquer le savoir faire SF 2 pour le noyau et l'option 1 ou 2 du savoir faire SF 4 pour l'image. *Réponses :*

a) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left(\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\right)$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left((1,1,2),(1,-1,0)\right)$

b) f est injective, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left((2,3,1,0),(-1,1,1,1),(1,-1,1,-2)\right)$

c)
- *Si* $\alpha = 2$: $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left((-1,-1,1,0),(-1,0,0,1)\right)$
  $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left((1,1,0),(1,0,1)\right)$
- *Si* $\alpha \neq 2$: $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left((-1,0,0,1)\right)$
  $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left((1,1,0),(1,0,1),(\alpha,1,1)\right)$

4 *Attention : $P(X+1)$ désigne le polynôme composé P appliqué à $(X+1)$, ne pas confondre avec le produit de P par $(X+1)$.*

1. Il y a deux points à montrer :
- *f est à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$.*
- *f est linéaire.*

2. Appliquer le savoir faire SF 2 pour le noyau
On écrit $\operatorname{Ker} f$ sous forme de Vect.
On commence par : « Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ ».
Ensuite par équivalence, on résout :

$$f(P) = 0 \iff X\left(P'(X+1) - P'(1)\right) = 0 \iff \ldots$$

Réponse : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$

3. Utiliser par exemple l'option 1 du savoir faire SF 4 pour l'image.
Une base de $\mathbb{R}^3[X]$ est $(1, X, X^2, X^3)$.
Par théorème : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)\right)$.
Calculer ensuite $f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)$.
Réponse : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(2X^2, 3X^3 + 6X^2)$.

5

1. Garder les lettres A et M (ne pas écrire les matrices avec les coefficients).

2. Appliquer le savoir faire SF 2 pour le noyau
On écrit $\operatorname{Ker} f$ sous forme de Vect.
On commence par : « Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ».
Ensuite par équivalence, on résout :

$$f(M) = 0 \iff AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \ldots$$

Réponse : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(B, C)$
où $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Le calcul de $\operatorname{Ker} f$ vous assure que f n'est pas injective.
Pour la surjectivité : utilisez alors le théorème « miracle », aucun calcul n'est nécessaire ! (voir le IV du cours).

3. Utiliser par exemple l'option 1 du savoir faire SF 4 pour l'image.
Par théorème : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(f(E_{1,1}), f(E_{1,2}), f(E_{2,1}), f(E_{2,2})\right)$.
Calculer ensuite $f(E_{1,1}), f(E_{1,2}), f(E_{2,1}), f(E_{2,2})$.

Réponse : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(U, V)$ où
$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. Vérifier les deux conditions du cours :
(a) $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(b) $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ (la rédaction doit commencer par : « Soit $M \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$ », ensuite on traduit séparément les deux conditions $M \in \operatorname{Ker} f$ et $M \in \operatorname{Im} f$ pour arriver à montrer que $M = 0$)

6

1. Montrer par double inclusion que $\operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X]$.Pour montrer que $\operatorname{Ker}\Delta \subset \mathbb{R}_0[X]$, étant donné P tel que $\Delta(P) = 0$, montrer que $R(X) = P(X) - P(0)$ possède une infinité de racines.

2. Utiliser l'option 3 du savoir faire SF 4 : raisonner par inclusion-dimension et montrer que $\operatorname{Im}\Delta_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$

3. On peut « choisir » le n pour appliquer Δ_n.
Plus rigoureusement, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est fixé et si on fixe un entier $n \geq 1 + \deg P$, alors $P \in \operatorname{Im}\Delta_n \subset \operatorname{Im}\Delta$.

7

- *Linéarité*. Elle repose sur la propriété d'unicité du couple (Q, R) fourni par la division euclidienne. Précisément, étant donnés $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$ leurs images $f(P_1)$ et $f(P_2)$ vérifient :

$$AP_1 = BQ_1 + f(P_1) \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + f(P_2)$$

Combiner ces deux égalités pour former **la** division euclidienne de $A(\lambda P_1 + \mu P_2)$ par B et identifier le reste obtenu avec $f(\lambda P_1 + \mu P_2)$.
- *Noyau*. Traduire la nullité de $f(P)$ comme une condition de divisibilité. *Réponse :* $\operatorname{Ker} f = B\mathbb{K}[X]$
- *Image*. Montrer que $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ où $n = \deg B$ en procédant par double inclusion. Pour montrer que $\mathbb{K}_{n-1}[X] \subset \operatorname{Im} f$, utiliser une relation de Bézout entre A et B.

8 Résoudre l'équation $f(x, y) = (a, b)$.
On trouve $f^{-1}(a, b) = \left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a-b}{2}\right)$

9 $\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \mathbb{R}^{n+1}$ donc l'injectivité suffit (th miracle). Pour l'injectivité comparer la multiplicité de 0 comme racine de P au degré de P

10

1.
- *Première méthode* On montre que f est injective et on conclut par le théorème miracle.
- *Deuxième méthode* On montre que f transforme la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ en une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- *Troisième méthode* On trouve g tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ en remarquant que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]} - D$ où $D : P \mapsto P'$ vérifie $D^{n+1} = 0$ (penser à la factorisation géométrique).

2. Dériver successivement la relation $P - P' = Q$, $P' - P'' = Q', \ldots, P^n - P^{n+1} = Q^{(n)}$ puis penser à un télescopage.

3. Considérer la fonction $\lambda : t \mapsto P(t)e^{-t}$ et calculer λ'

11

a) On peut par exemple utiliser le théorème miracle et montrer l'injectivité en exploitant le fait que $\deg \varphi(P) = \deg P$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

b) L'injectivité se prouve comme dans la question a) mais ici elle ne suffit pas. Pour montrer que φ est surjectif, on peut exploiter le résultat de a) : une fois $P \in \mathbb{R}[X]$ fixé, si on fixe un entier $n \geq \deg P$, alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

12 **1.** Il s'agit de vérifier que :

- $\mathbb{K}[A]$ possède I_n
- $\mathbb{K}[A]$ est stable par combinaison linéaire.
- $\mathbb{K}[A]$ est stable par produit.

2. Il s'agit de montrer que I_n possède un antécédent par T. Il suffit pour cela de montrer que T est surjective. Montrer que T est injective puis utiliser le théorème miracle.

13

a) Penser à l'inclusion classique $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} v \circ u$

b) Combiner le théorème du rang et aux inégalités sur les rangs : $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \operatorname{rg} v$

14 **a)** Raisonner en termes d'inclusion sur les images en justifiant d'abord que $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
Utiliser ensuite la formule de Grassmann.

b) Il s'agit de montrer deux inégalités : $\begin{cases} \operatorname{rg} f \leq \operatorname{rg}(f-g) + \operatorname{rg} g \\ \operatorname{rg} g \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg}(f-g) \end{cases}$.
Les deux inégalités s'obtiennent en appliquant le résultat de a) à des applications judicieusement choisies.

15 **a)** Combiner deux idée :

- Le théorème du rang appliqué à f.
- Le fait que $0 = f \circ f^2$ qui assure que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$.

b) Plus difficile, il s'agit d'appliquer le théorème du rang à une application φ judicieusement construite.
Vérifier que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \operatorname{Im} f & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ convient

16 Combiner deux idée :

- Le théorème du rang appliqué à f.
- Le fait que $0 = f \circ f$ équivaut à $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

17 Appliquer le théorème du rang à

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \operatorname{Im} f & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & g(x) \end{array}$$

Et montrer que : $\operatorname{Ker} \varphi \subset \operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} \varphi \subset \operatorname{Im} g \circ f$

18 Procéder en deux temps :

- Montrer d'abord que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \leq n$.
  Pour cela utiliser $g \circ f = 0$ et le th du rang.
- Montrer ensuite que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \geq n$.
  Pour cela utiliser $\operatorname{rg}(f+g) = n$ (surjectivité) et montrer que $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ (attention[1])

19 Si $\operatorname{rg}(g) \leq \operatorname{rg}(f)$, construire u et v par interpolation linéaire.

20 **1.** On peut faire une preuve « circulaire » en montrant

$$i) \implies ii) \implies iii)$$

- *Pour montrer* $i) \implies ii)$. Par double inclusion :
  - $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ est toujours vraie.
  - Pour montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$, revenir aux éléments. Le début doit être :
    « Soit $y \in \operatorname{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. »
    utiliser $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$ pour décomposer x.
- *Pour montrer* $ii) \implies iii)$. Par inclusion-dimension avec le théorème du rang.
- *Pour montrer* $ii) \implies iii)$. Utiliser le critère pratique en dimension finie *i.e.* vérifier que
  - $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E$ (facile)
  - $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ (revenir aux élements, « Soit $y \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$ » ensuite traduire le fait que $y \in \operatorname{Im} f$ puis que $y \in \operatorname{Ker} f$).

2. a) L'implication « $\Longleftarrow$ » a été montré dans la **1.**.
Pour « $\implies$ », procéder par double inclusion :

- $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ est toujours vraie.
- Pour montrer que $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$, revenir aux éléments : étant donné $x \in \operatorname{Ker} f^2$, remarquer que $f(x) \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$.

b) L'implication « $\implies$ » a été montré dans la **1.**
Pour « $\Longleftarrow$ », étant donné $x \in E$, il s'agit de trouver $y, z \in E$ tels que $y \in \operatorname{Im} f$, $z \in \operatorname{Ker} f$ et $x = y + z$.
Puisque $f(x) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$, il existe $a \in E$ tel que $f(x) = f^2(a)$.
Vérifier que $y = f(a)$ et $z = x - f(a)$ conviennent.

21 *Se souvenir ici que* $x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ *signifie* $f(x) = \lambda x$.

1. E n'est pas supposé de dimension finie : fixer $x \in E$ et montrer par analyse-synthèse qu'il existe un unique couple (y, z) d'éléments de E tels que

- $x = y + z$
- $f(y) = -y$
- $f(z) = 2z$.

Pour l'analyse il s'agit de trouver y et z en fonction de x.
Appliquer f à l'égalité $y + z = x$ puis résoudre le système

$$\begin{cases} y + z = x \\ -y + 2z = f(x) \end{cases}$$

Pour la synthèse il s'agit essentiellement de calculer $f(y)$ et $f(z)$. Dans le calcul penser à utiliser $f^2(x) = f(x) + x$ (car $f^2 - f - \mathrm{Id}_E = 0$)

2.

22 **a)** Utiliser le critère pratique en dimension finie *i.e.* vérifier que

- $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E$ (facile)
- $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ (revenir aux élements, « Soit $y \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$ » ensuite traduire le fait que $y \in \operatorname{Im} f$ puis que $y \in \operatorname{Ker} f$ et utiliser $f^3 + f^2 + f = 0$).

b) La double inclusion est très simple

23 **a)** fixer $x \in E$ et montrer par analyse-synthèse qu'il existe un unique couple (y, z) d'éléments de E tels que :
• $x = y + z$ • $f(y) = 0$ • $z \in \operatorname{Im} g$.
Pour l'analyse il s'agit de trouver y et z en fonction de x.
z s'écrit sous la forme $z = g(x_1)$ pour un certain $x_1 \in E$.
Appliquer f à l'égalité $y + g(x_1) = x$: $f \circ g(x_1) = f(x)$.
Appliquer alors g et utiliser $g \circ f \circ g = g$: $z = g \circ f(x)$.
Ensuite $y = x - z$. La synthèse ne pose pas de problème.

b) Procéder par double inclusion.

- $f(\operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} f$ est facile.
- Pour montrer : $\operatorname{Im} f \subset f(\operatorname{Im} g)$, utiliser la question a)

1. Il est important de comprendre la différence entre $\operatorname{Im}(f+g)$ et $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$:

- $\operatorname{Im} f + g = \operatorname{Im} h$ où h est l'application $h = f + g$ (somme d'applications), concrètement : $\operatorname{Im}(f+g) = \{h(x)\,;\, x \in E\} = \{f(x) + g(x)\,;\, x \in E\}$
- $(\operatorname{Im} f) + (\operatorname{Im} g) = F + G$ où $F = \operatorname{Im} f = \{f(x_1)\,;\, x_1 \in E\}$ et $G = \operatorname{Im} g = \{g(x_2)\,;\, x_2 \in E\}$ (somme de sous-espaces) donc $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \{f(x_1) + g(x_2)\,;\, x_1, x_2 \in E\}$

Intuitivement, $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ est plus gros que $\operatorname{Im}(f+g)$ vu que dans $\operatorname{Im}(f+g)$ « il faut prendre le même x »

24 Procéder par double implication.

- *Pour i)* $\Longrightarrow$ *ii)* fixer $x \in E$ et montrer par analyse-synthèse qu'il existe un unique couple (y,z) d'éléments de E tels que : • $x = y + z$ • $y \in \operatorname{Im} f$ • $g(z) = 0$.
Pour l'analyse il s'agit de trouver y et z en fonction de x.
y s'écrit sous la forme $y = f(x_1)$ pour un certain $x_1 \in E$.
En appliquant g à l'égalité $f(x_1)+z = x$ cela donne $g\circ f(x_1) = g(x)$.
La bijectivité de $\varphi = g \circ f$ assure que $x_1 = \varphi^{-1}\big(g(x)\big)$.
Une fois x_1 connu il n'est pas difficile d'exprimer y et z.
La synthèse ne pose pas de problème.
- *Pour ii)* $\Rightarrow$ *i)* Montrer l'injectivité et la surjectivité de $g \circ f$

25 Pour définir g dans l'implication $i) \Longrightarrow ii)$, on peut considérer un supplémentaire S de $F = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ puis définir $g_{|S}$ et $g_{|F}$. Pour définir $g_{|F}$, on peut utiliser la forme géométrique du théorème du rang.

26 Ecrire $P = XQ$ pour un certain polynôme Q tel que $Q(0) \neq 0$.
L'hypothèse s'écrit : $Q(f) \circ f = 0$.
Procéder par analyse synthèse.
Dans l'analyse, si $x = y+z$ pour certains $y \in \operatorname{Ker} f$ et $z \in \operatorname{Im} f$, remarquer que $Q(f)(z) = 0$ et que $Q(f)(y) = a_0 y$ où a_0 est le coefficient constant de Q.

27
1. Procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour l'hérédité, appliquer f à $g \circ f - f \circ g = n f^{n-1}$ et utiliser $f \circ g = g \circ f - \operatorname{Id}_E$.
2. Procéder par récurrence sur n.
Pour l'hérédité si, $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n+1}$ vérifient :
$$\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k f^k = 0$$
Composer par g par la gauche et par la droite :
$$\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k g \circ f^k = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k \, f^k \circ g = 0$$
faire la différence des deux puis utiliser la question 1.

28
1. Considérer un x_0 tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$ et montrer que $x = f^{p-1}(x_0)$ est un élément de $\operatorname{Ker} f$.
2. Considérer $g = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} f^k$.

29
1. Montrer que : $\operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$.
2. a) Appliquer le théorème du rang à $\varphi : \begin{array}{ccc} \operatorname{Im} f^k & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ et montrer que : $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} f^k$ et $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Im} f^{k+1}$
b) Montrer que : $\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k$.

30 Posant $F_k = \operatorname{Im}(u_k \circ \cdots \circ u_1)$ montrer que :

- $F_{k+1} \subset F_k$
- si $F_k \neq \{0_E\}$ alors l'inclusion est stricte : $F_{k+1} \neq F_k$

ce qui assure que $F_n = \{0_E\}$.

31
1. Montrer que $\deg\big(\varphi(P)\big) \leq \big(\deg P\big) - 1$.
2. Ecrire $\varphi = f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$ où $f : P \mapsto P(X+1)$ et développer $(f - \operatorname{Id})^n$ à l'aide de la formule du binôme.

32 Exploiter :
$$f^{2p+1} + g^{2p+1} = f^{2p+1} - (-g)^{2p+1} = (f+g) \sum_{k=0}^{2n} f^k \circ f^{2n-k}$$

33 Il s'agit de montrer que

- $\operatorname{Id}_E \in F \cap \operatorname{GL}(E)$
- Si $f, g \in F \cap \operatorname{GL}(E)$, alors $f \circ g \in F \cap \operatorname{GL}(E)$
- Si $f \in F \cap \operatorname{GL}(E)$, alors $f^{-1} \in F \cap \operatorname{GL}(E)$

Les deux premiers points sont vrais par hypothèses. Pour le dernier point :

- *Première méthode.* Noter $p = \dim F$ et utiliser le fait que la famille $(\operatorname{Id}_E, f, \ldots, f^p)$ est liée pour écrire une égalité de la forme $\operatorname{Id}_E = f \circ h$ où $h \in F$.
- *Deuxième méthode* Considérer l'application
$$T : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & f \circ u \end{array}$$
Il s'agit de montrer que Id_E possède un antécédent.
On peut en fait montrer que T est injective puis utiliser le théorème miracle.

34
1. Fixer x_0 tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$ et montrer que $\mathscr{B}$ est libre.
2. La question 1 assure que $g(x_0)$ s'écrit sous la forme :
$$g(x_0) = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 f(x_0) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x_0)$$
où l'on a noté $h = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} f^k$.
Pour montrer que $g = h$ (égalité entre les deux applications), il suffit (th d'interpolation linéaire) de montrer que g et h coïncident sur tous les éléments de la base $\mathscr{B}$ *i.e.* de montrer que $g(f^k(x_0)) = h(f^k(x_0))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

35
1. Considérer une base $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ de E. Il suffit (théorème « d'interpolation linéaire ») de trouver un entier p tel que $f^p(b_1) = \cdots = f^p(b_n) = 0$ pour assurer que $f^p(x) = 0$ pour tout $x \in E$.
2. Dans $E = \mathbb{K}[X]$, pour tout polynôme P il existe n tel que $P^{(n)} = 0$. Formaliser ce constat pour construire un contre-exemple.

36 Définir f par « interpolation linéaire » : considérer une base $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_{2n})$ de E et définir $f(b_1), \ldots, f(b_{2n})$ de façon à ce que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(b_1, \ldots, b_n)$.

37 Il est nécessaire que $\dim F + \dim G = n$ (utiliser le théorème du rang).
Prouver que cette condition est aussi suffisante en définissant f par interpolation linéaire. Posant $p = \dim F$ (donc $\dim G = n - p$), compléter une base $(b_1, \ldots, b_p)$ de F en une base $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ de E et définir les $f(b_i)$ pour que :

- $b_1, \ldots, b_p$ appartiennent au noyau de f
- f envoie $(b_{p+1}, \ldots, b_n)$ sur une base de G.

Prouver ensuite soigneusement que l'application f ainsi définie vérifie $\operatorname{Ker} f = F$ et $\operatorname{Im} f = G$.

38 **1.** Il est nécessaire que $\dim G \leq \dim F$ (la dimension décroît). Si $f(F) = G$, considérer pour cela une base $(b_1, \ldots, b_p)$ de F et utiliser

$$f\Big(\mathrm{Vect}(b_1, \ldots, b_p)\Big) = \mathrm{Vect}\Big(f(b_1), \ldots, f(b_p)\Big)$$

pour prouver que $\dim G \leq p$.

Prouver que cette condition est aussi suffisante en définissant f par « interpolation linéaire ».

Posant $p = \dim F$ (donc $q = \dim G \leq p$), compléter une base $(b_1, \ldots, b_p)$ de F en une base $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ de E et définir les $f(b_i)$ pour que :

- f envoie $(b_1, \ldots, b_q)$ sur une base $(c_1, \ldots, c_q)$ de G
- $b_{q+1}, \ldots, b_n$ appartiennent au noyau de f

Prouver ensuite soigneusement que l'application f ainsi définie vérifie $f(F) = G$.

2. Il est nécessaire que $\dim G = \dim F$ (deux espaces isomorphes ont même dimension)

Prouver que cette condition est aussi suffisante en définissant f par « interpolation linéaire » comme dans la question précédente mais en s'assurant cette fois-ci que f transforme $(b_1, \ldots, b_n)$ en une base de E (pour la bijectivité).

39 **a)** La linéarité repose sur la linéarité de φ.

Pour calculer $\mathrm{rg}(\varphi \otimes a)$ montrer que $\mathrm{Im}\, \varphi = \mathrm{Vect}(a)$.

b) Par hypothèse, $\mathrm{Im}\, v$ est une droite vectorielle ce qui permet de définir a *via* : $\mathrm{Im}\, v = \mathrm{Vect} a$.

Pour définit φ utiliser l'hypothèse selon laquelle E est de dimension finie qui permet de raisonner par « interpolation linéaire » *i.e.* de définir φ en donnant ses valeurs sur une base de E. Considérer une base $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ et définir les valeurs $\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n)$ pour assurer les égalités $(\varphi \otimes a)(b_1) = v(b_1), \ldots, (\varphi \otimes a)(b_n) = v(b_n)$

40 Considérer une base $\mathscr{B} = (a, b_2, \ldots, b_n)$ de E et montrer que :

- Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $u(e_i) = \alpha_i e_i + \lambda_i a$ pour certains $\alpha_i, \lambda_i \in \mathbb{K}$
- $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n$
- $u(a) \in \mathrm{Vect}(a)$.

Définir ensuite φ par interpolation linéaire sur $\mathscr{B}$.