Calculs d'intégrales

1 Calculer les intégrales suivantes (où $n \in \mathbb{N}^*$ pour I_2) :

a) $I_1 = \int_0^1 \max(e^t, 2)\,\mathrm{d}t$ **b)** $I_2 = \int_0^n e^{\lfloor x \rfloor}\,\mathrm{d}x$ **c)** $I_3 = \int_0^1 |3u-1|\,\mathrm{d}u$

2 SF 3 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue, telle que :

$$\forall t \in [a,b], \quad f(a+b-t) = f(t)$$

a) Etablir : $\displaystyle\int_a^b t\,f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

b) Calculer : $\displaystyle I = \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$

3 SF 2 Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on pose $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t$.

1. A l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tous $p, q \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p+1}(\cos\theta)^{2q+1}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}I(p,q)$.

2. a) Montrer : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*$, $I(p,q) = \dfrac{q}{p+1}I(p+1,q-1)$

b) En déduire : $\forall p,q \in \mathbb{N}, \quad I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$

4 SF 1 SF 3 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ strictement monotone. Montrer : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = [t f(t)]_a^b$

5 SF 2 Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'un changement de variable affine échangeant ses bornes.

6 SF 1 SF 4 Soit $f \in \mathscr{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. On pose :

$$I = \int_0^1 f(t)f'(t)\frac{\cos\pi t}{\sin\pi t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{f(t)^2}{\tan^2\pi t}(1+\tan^2\pi t)\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier l'existence de I et J.

2. Montrer que : $I = \dfrac{\pi}{2}J$.

Positivité et croissance de l'intégrale

7 SF 7 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue, telle que : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$
Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

8 SF 7 Soient f, g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que g est positive sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

9 SF 1 SF 5 Soit $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ convexe et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,2\pi]$. Montrer : $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,\mathrm{d}t \geq 0$

10 SF 7 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue, et $n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a,b]$.

11 SF 5 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $\varepsilon > 0$.

1. Montrer que pour tous $x, y \in [a,b]$:

$$\left|f(y)^2 - f(x)^2\right| \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t + \varepsilon\int_a^b f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$

2. En déduire :

$$\sup_{y\in[a,b]} f^2(y) \leq \left(\frac{1}{b-a}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t + \varepsilon\int_a^b f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$

12 SF 5 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, à valeurs dans un intervalle I et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \in I$

2. Montrer que : $\displaystyle\varphi\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq \int_0^1 \varphi\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t$

13 SF 5 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et convexe sur $[a,b]$ $(a<b)$.

1. Montrer que : $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{f(b)+f(a)}{2}$.

2. On suppose en outre f dérivable sur $[a,b]$.

a) Montrer que pour tout $c \in [a,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq f(c) + \left(\frac{a+b}{2}-c\right)f'(c)$$

b) En déduire que :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{f(a)+f(b)}{2} - (b-a)\frac{f'(b)-f'(a)}{4}$$

Calculs de limites d'intégrales par encadrement

14 SF 5 SF 6 Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n+t}\,\mathrm{d}t \sim \frac{2}{n}$.

15 SF 5 SF 6 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $\displaystyle I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que : $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En déduire que la suite (I_n) converge et donner sa limite.

2. a) Calculer $I_n + I_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Déterminer : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

16 SF 5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\displaystyle u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $\varepsilon \in]0,\pi[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi-\varepsilon}{2}\right)\right)^n + \frac{\varepsilon}{2}$$

2. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

17 SF 5 SF 6 On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.

Etablir : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \dfrac{x^3}{3} \leq f(x) \leq \dfrac{x^3}{3} + x$.

En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

18 SF 5 SF 6 Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.
On souhaite démontrer que : $\displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$.

1. ★★ Démontrer le résultat lorsque f est lipschitzienne

2. ★★★★ Démontrer le résultat dans le cas général.

19 SF 5 Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$: $\displaystyle\int_\alpha^1 f(t)ne^{-nt}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

2. En revenant à la définition de la limite montrer que :

$$\int_0^1 f(t)ne^{-nt}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

20 SF 5 SF 6 **1.** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\cos t}{t}$ de deux façons :

a) En encadrant l'intégrale

b) En utilisant la fonction $u : t\mapsto \dfrac{\cos t-1}{t}$ prolongée par continuité en 0.

2. Soit $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ dérivable en 0. En adaptant la deuxième méthode, montrer : $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} f(0)\ln 2$

21 **a)** Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\,\mathrm{d}t$

b) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^{x}\operatorname{Arctan}(t+1)-\operatorname{Arctan} t\,\mathrm{d}t$

22 SF 5 SF 6

a) Montrer que $t\mapsto\dfrac{\sin t}{t}$ est décroissante sur $]0,\frac{\pi}{2}[$.

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_x^{\pi x}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

23 SF 5 Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$, continue. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n=\left(\displaystyle\int_a^b f(t)^n\,\mathrm{d}t\right)^{1/n}$ et $M=\max\limits_{t\in[a,b]} f(t)$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n\leq (b-a)^{1/n}M$.

b) Montrer que (u_n) converge vers M.

24 SF 2 SF 5 SF 6 Soit $f:[0,\mathrm{e}]\to\mathbb{R}$, continue.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $I_n=\displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n)\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que : $I_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $nI_n=\displaystyle\int_1^{(1+\frac{1}{n})^n}\frac{f(t)}{t}t^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire : $I_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^{e}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t+o\left(\frac{1}{n}\right)$

Suites d'intégrales et intégrations par parties

25 SF 1 *Intégrales de Wallis*. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$W_n=\int_0^{\pi/2}(\cos t)^n\,\mathrm{d}t$$

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $(n+2)W_{n+2}=(n+1)W_n$.

2. Etudier la monotonie de (W_n).

3. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=(n+1)W_{n+1}W_n$. Montrer que (u_n) est une suite constante. Que vaut cette constante ?

4. Déduire de **2.** et **3.** un équivalent de W_n.

26 SF 1 SF 5 SF 6 **a)** Montrer que : $\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\sim\frac{1}{2n}$

b) Etablir : $\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

27 SF 1 SF 5 SF 6 **1.** Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

a) Calculer u_0,u_1,u_2 **b)** Montrer que $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$

2. Etablir : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1\frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x^n}=\frac{\ln 2}{n}-\frac{1}{n}\int_0^1\ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$

3. En déduire un équivalent de $1-u_n$.

28 SF 5 SF 6 **1.** Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(1)\neq 0$. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t\sim\frac{f(1)}{n}$.

2. On suppose f de classe $\mathscr{C}^2$.

Montrer : $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t\underset{n\to+\infty}{=}\frac{f(1)}{n}-\frac{f(1)+f'(1)}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Intégrales et primitives

29 Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que : $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=f(c)$.

30 Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, continue.

1. Justifier l'existence et calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\cos(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$

2. On suppose que : $f(t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Montrer que : $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\cos(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

31 Soit $f\in\mathscr{C}\big([0,2],\mathbb{R}\big)$ Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\displaystyle\int_0^1 f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\,\mathrm{d}x$

32 SF 1 SF 5 Soit $f\in\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ concave telle que $f(0)=1$.

1. Montrer que pour tout $x\in[0,1]$: $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\geq\frac{x+xf(x)}{2}$

2. En déduire que : $\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{4}$.

3. En déduire enfin : $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\leq\frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$

Fonctions définies par une intégrale

33 SF 3 SF 9 Pour tout $x>0$ on pose : $G(x)=\displaystyle\int_{1/x}^{x}\frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. a) Montrer que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Calculer $G'(x)$ pour $x>0$. Que peut-on en déduire ?

2. Retrouver ce résultat en effectuant le changement de variable $t=\frac{1}{u}$ dans l'intégrale.

34 SF 9 Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note φ la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}^*$. Montrer que :

a) φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.

b) φ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

35 SF 9 Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on pose : $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t$

1. Justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

2. Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.

36 SF 9 Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $\varphi(x)=\displaystyle\int_0^x\operatorname{Arctan}(t+x^2)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer φ'.

37 SF 9 Etudier (parité, périodicité, dérivée), puis simplifier, la fonction $\varphi : x\mapsto\displaystyle\int_0^{\sin^2 x}\operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\cos^2 x}\operatorname{Arccos}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$

38 SF 5 SF 6 Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0)\neq 0$.

On note g la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^1\frac{f(t)}{1+tx}\,\mathrm{d}t$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que : $g(x)\underset{x\to+\infty}{=}f(0)\dfrac{\ln x}{x}+O\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2. Dans le cas où f est seulement supposée continue sur $\mathbb{R}$, déterminer un équivalent de $g(x)$ en $+\infty$.