1 **a)** Utiliser la relation de Chasles pour couper l'intégrale en $\ln 2$. *Réponse :* $I_1 = 2\ln 2 + e - 2$

b) Utiliser la relation de Chasles (ou la définition de l'intégrale pour les fonction en escalier) pour couper l'intégrale en une somme d'intégrales entre k et $k+1$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. *Réponse :* $I_2 = \dfrac{e^n - 1}{e - 1}$

c) Avec la relation de Chasles, couper l'intégrale en $\frac{1}{3}$.

Réponse : $I_3 = \dfrac{5}{6}$

2

a) Effectuer le changement de variable $x = a + b - t$.

b) L'intégrale est $I = \displaystyle\int_0^{\pi} t f(t)\,\mathrm{d}t$ où $f : t \mapsto \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}$.
Appliquer le résultat de la question a).

3 **1.** Changement de variable $t = (\sin\theta)^2$.

2. a) Effectuer une intégration par parties dans
$I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q$ pour obtenir $I(p+1, q-1)$

b) Le 2a donne $I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$
Réitérer ainsi le résultat :
$$I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1) = \frac{q}{p+1}\frac{q-1}{p} I(p+2, q-2) = \ldots$$
Calculer enfin $I(p+q, 0)$ pour obtenir le résultat.

4 Dans la seconde intégrale, effectuer le changement de variable $t = f(x)$.

5 Le changement de variable est $x = \frac{\pi}{4} - t$.
On exprime I en fonction d'elle-même.
Réponse : $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

6 **1.** Pour l'existence de I :

- il suffit de montrer que $g : t \mapsto f(t) f'(t) \dfrac{\cos \pi t}{\sin \pi t}$ est prolongeable par continuité en 0 et 1.
- En 0 utiliser : $f(t) \underset{t\to 0}{=} f'(0)t + o(t)$.
- Procéder de même en 1 en posant $t = 1 + h$ avec $h \to 0$.

L'existence de J se justifie de même en montrant que $h : t \mapsto \dfrac{f(t)^2}{\tan^2 \pi t}(1 + \tan^2 \pi t)$ est prolongeable par continuité en 0, 1 et en $\dfrac{1}{2}$.

2. Le résultat s'obtient par intégration par parties mais les fonctions g et h ne sont pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ (problèmes en 0 et en 1).

Pour faire les calculs proprement, calculer $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} g(t)\,\mathrm{d}t$ pour $\varepsilon \in]0,1[$ par IPP puis faire tendre ε vers 0 dans le résultat obtenu.

7 Il s'agit de montrer $g : t \mapsto f(t) - t$ s'annule. Observer que $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Deux méthodes possibles conduisent au résultat voulu :

- Avec le T.V.I : par l'absurde si le résultat demandé n'a pas lieu, alors la fonction g est de signe constant (par exemple $g > 0$), en déduire une contradiction.
- En appliquant le théorème de Rolle à une primitive de g.

8 Appliquer le T.V.I. à la fonction
$$\varphi : x \mapsto f(x)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$
Il s'agit de trouver une valeur de φ négative ainsi qu'une valeur positive. Pour trouver de telles valeurs on peut appliquer le théorème des bornes atteintes à f.

9 Par deux I.P.P. successives on obtient :
$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,\mathrm{d}t = f'(2\pi) - f'(0) - \int_0^{2\pi} f''(t)\cos t\,\mathrm{d}t$$
Reste à montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f''(t)\cos t\,\mathrm{d}t \le f'(2\pi) - f'(0)$.

10 Supposer que f s'annule au plus n fois, noter $a_1 < \cdots < a_p$ les zéros de f en lesquels f change de signe (avec $p \le n$) et considérer le polynôme $P = (X - a_1)\ldots(X - a_p)$. La fonction $t \mapsto f(t)P(t)$ est continue, de signe constant et d'intégrale nulle. Elle devrait donc être nulle ce qui contredit l'hypothèse de départ.

11 **1.** Remarquer que $f^2(y) - f^2(x) = \displaystyle\int_x^y 2f'(t)f(t)$ puis utiliser $2ab \le a^2 + b^2$ en choisissant judicieusement a et b pour faire intervenir le paramètre ε.

2. Fixer y tel que $f^2(y) = \sup\limits_{y\in[a,b]} f^2(y)$ et intégrer l'inégalité de la première question par rapport à x.

12 **1.** Le théorème des bornes atteintes assure l'existence de m et M dans I tels que
$$\forall t \in [0,1], \quad m \le f(t) \le M$$
Conclure en utilisant la croissance de l'intégrale et le fait que I est un intervalle.

2. L'inégalité des tangentes permet d'écrire :
$$\forall c, x \in I, \quad \varphi(x) \ge \varphi(c) + \varphi'(c)(x - c)$$
Prendre : $c = \int_0^1 f$ et $x = f(t)$ pour écrire une inégalité valable pour tout $t \in [0,1]$ puis utiliser la croissance de l'intégrale

13 **1.** Utiliser l'inégalité des cordes pour majorer $f(x)$.

2. a) Minorer $f(x)$ en utilisant le fait que f est au-dessus de sa tangente en c.

b) Prendre $c = a$ puis $c = b$ dans l'inégalité précédente et sommer les inégalités obtenues.

14 Encadrer judicieusement $\dfrac{\sin t}{n+t}$ pour $t \in [0,\pi]$ puis utiliser la croissance de l'intégrale pour montrer que $\dfrac{2}{n+\pi} \le I_n \le \dfrac{2}{n}$

15 **1.** Encadrer judicieusement $\dfrac{t^{2n}}{1+t^2}$ pour $t \in [0,1]$

2. a) Regrouper les deux intégrales et factoriser par t^{2n}. On trouve $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$.

b) Remplacer $\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ par $(-1)^n(I_n + I_{n+1})$ puis faire apparaître un télescopage, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1}=I_0+(-1)^N I_{N+1}.$$

16 **1.** Utiliser la relation de Chasles en $\dfrac{\pi-\varepsilon}{2}$.

2. Revenir à la définition de la limite « avec les ε » en utilisant le fait que $v_n=\frac{\pi-\varepsilon}{2}(\sin\frac{\pi-\varepsilon}{2})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

17 Encadrer « l'intérieur ».

18 **1.** Pour $x,y\in[0,1]$, $\left|f(x)-f(y)\right|\le M\left|x-y\right|$

Utiliser ceci pour majorer : $\left|\displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t-f(0)\right|$.

2. Revenir à la définition de la limite.
Etant donné $\varepsilon>0$, il s'agit de majorer

$$\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-f(0)\right|\le\int_0^1 |f(t^n)-f(0)|\,\mathrm{d}t$$

Traduire la continuité de f en 0 et exploiter le fait que $|f(x)-f(0)|\le\varepsilon$ pour $x\in[0,\alpha]$ en coupant l'intégrale en $\alpha^{1/n}$ avec la relation de Chasles

- Le premier morceau peut être majoré par $\alpha^{1/n}\ \varepsilon$
- Le second morceau est majorable par $2\,\|f\|_\infty(1-\alpha^{1/n})$

Finalement $\left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-f(0)\right|\le\alpha^{1/n}\ \varepsilon+2\,\|f\|_\infty(1-\alpha^{1/n})$, que l'on peut majorer par 2ε à partir d'un certain rang.

19 **1.** Utiliser le fait que f est bornée pour majorer l'intégrale.

2. Etant donné $\varepsilon>0$ traduire la continuité de f en 0 et exploiter le fait que $|f(t)|\le\varepsilon$ pour $t\in[0,\alpha]$ en coupant l'intégrale en α avec la relation de Chasles.

20 **1. a)** *Méthode 1. Par croissance de l'intégrale* (i.e. *en « encadrant l'intérieur »*)

Pour $x\in\,]0,\frac{\pi}{2}[$ fixé, encadrer le quotient $\dfrac{\cos t}{t}$ pour obtenir : $\cos(2x)\ln 2\le\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\le(\cos x)\ln 2$.

Puis faire tendre x vers 0 (th. d'encadrement).

b) *Méthode 2. On reproduit la méthode utilisée dans l'exemple du cours avec* $H(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

On introduit la fonction $u:t\mapsto\dfrac{\cos t}{t}-\dfrac{1}{t}$ de sorte que : $\dfrac{\cos t}{t}=u(t)+\dfrac{1}{t}$

Pour $x\in\,]0,\frac{\pi}{2}[$: $f(x)=\displaystyle\int_x^{2x}u(t)\,\mathrm{d}t+\ln 2$.

On montre ensuite que $\displaystyle\int_x^{2x}u(t)\,\mathrm{d}t\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$ comme dans l'exercice du cours en montrant que u est prolongeable par continuité en 0.

2. Adapter la méthode 2 ci-dessus :

$$\frac{f(t)}{t}=\frac{f(t)-f(0)}{t}+f(0)\frac{1}{t}=u(t)+f(0)\frac{1}{t}$$

On intègre entre x et $2x$ et on montre ensuite que $\displaystyle\int_x^{2x}u(t)\,\mathrm{d}t\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$ en montrant que $u:t\mapsto\dfrac{f(t)-f(0)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0.

21 **a)** Pour $x>0$ fixé, en « encadrant l'intérieur » $\dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t}$ pour tout $t\in[x,2x]$:

$$\operatorname{Arctan}(x)\ln 2\le\int_x^{2x}\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\,\mathrm{d}t\le(\operatorname{Arctan} 2x)\ln 2$$

Conclure par encadrement.

b) En séparant en deux intégrales puis en posant $s=t+1$ dans la première on obtient

$$\int_0^x\operatorname{Arctan}(t+1)-\operatorname{Arctan} t\,\mathrm{d}t=\int_x^{x+1}\operatorname{Arctan} t\,\mathrm{d}t-\int_0^1\operatorname{Arctan} t\,\mathrm{d}t$$

- La limite de $\displaystyle\int_x^{x+1}\operatorname{Arctan} t\,\mathrm{d}t$ se calcule en encadrant l'intérieur (par croissance de Arctan)
- L'intégrale $\displaystyle\int_0^1\operatorname{Arctan} t\,\mathrm{d}t$ se calcule par IPP.

Réponse : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\operatorname{Arctan}(t+1)-\operatorname{Arctan} t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}$.

22 **a)** Dériver $f(t)=\frac{\sin t}{t}$:

$f'(t)=\dfrac{t\cos t-\sin t}{t^2}=\dfrac{N(t)}{t^2}$ est du signe de $N(t)$.
Il reste à étudier le signe de N (dériver à nouveau).

b) Pour $x\in[0,\frac{1}{2}]$ fixé, utiliser la décroissance de f sur $[x,\pi x]$ pour encadrer l'intérieur :

Pour $t\in[x,\pi x]$: $\frac{\sin t}{t^2}=\dfrac{1}{t}\times f(t)$

et lorsque $t\in[x,\pi x]$: $f(\pi x)\le f(t)\le f(x)$
Ensuite utiliser la croissance de l'intégrale et faire tendre x vers 0. *Réponse.* $\ln\pi$.

23 Il est simple, en majorant $f(t)^n$ d'obtenir $u_n\le M(b-a)^{1/n}$.
Pour minorer u_n, utiliser le fait que M est atteint pour un certain $c\in[a,b]$: fixer $\varepsilon>0$, la continuité de f en c assure que $f(t)\ge M-\varepsilon$ pour $t\in[c-\alpha,c+\alpha]$.
En découpant l'intégrale avec la relation de Chasles, on peut alors montrer que $\int_a^b f^n\ge 2\alpha(M-\varepsilon)^n$ puis que $u_n\ge(2\alpha)^{\frac{1}{n}}(M-\varepsilon)$
On combinant tout ce qui précède, conclure à l'aide de la définition de la limite en montrant qu'à partir d'un certain rang $M-2\varepsilon\le u_n\le M+2\varepsilon$

24 **a)** Montrer qu'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que : $|I_n|\le M\dfrac{1}{n}$.

b) Changement de variable $x=t^{\frac{1}{n}}$.

c) Avec Chasles : $nI_n=\displaystyle\int_1^e\frac{f(t)}{t}t^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t-\int_{(1+\frac{1}{n})^n}^e\frac{f(t)}{t}t^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t$ et :

$$nI_n-\int_1^e\frac{f(t)}{t}=\underbrace{\int_1^e\frac{f(t)}{t}\left(t^{\frac{1}{n}}-1\right)\mathrm{d}t}_{J_n}-\underbrace{\int_{(1+\frac{1}{n})^n}^e\frac{f(t)}{t}t^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t}_{K_n}$$

Montrer ensuite que $J_n\to 0$ et que $K_n\to 0$

25 **1.** Intégrer par parties dans W_{n+2} en dérivant $\cos^{n+1}t$ et en primitivant $\cos t$.

2. Montrer que $(\cos t)^{n+1}\le(\cos t)^n$ pour $t\in[0,\pi/2]$ puis utiliser la croissance de l'intégrale.

3. Montrer que $u_{n+1}=u_n$.
Calculer u_0 pour trouver la valeur de la constante : on trouve que la constante vaut $\frac{\pi}{2}$.

4. Encadrer W_n^2 en multipliant l'encadrement $W_{n-1}\le W_n\le W_{n+1}$ par W_n.
Montrer ensuite que $W_{n-1}W_n$ et $W_{n+1}W_n$ sont tous deux

équivalents à $\frac{\pi}{2n}$ (utiliser la valeur constante de (u_n))

Réponse : $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

26 **a)** La technique est classique (le cas général est traité à l'exercice 28) : on intègre par parties pour faire apparaître $\frac{1}{n+1}$. Précisément une I.P.P. donne

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Il ne reste qu'à montrer que $\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+t^2)^2}\,dt = o(1)$

b) Faire une nouvelle intégration par parties :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)(n+3)} + \frac{8}{(n+1)(n+3)}\int_0^1 \frac{t^{n+4}}{(1+t^2)^3}\,dt$$

Pour conclure :

- Faire un DL 2 en $\frac{1}{n}$ sur $\frac{1}{2(n+1)}$ et $\frac{1}{2(n+1)(n+3)}$
- Montrer que $\frac{8}{(n+1)(n+3)}\int_0^1 \frac{t^{n+4}}{(1+t^2)^3}\,dt = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

27 **1. a)** $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \ln 2$, $u_2 = \frac{\pi}{4}$.

b) Le plus simple est de montrer que $1 - u_n \to 0$.

Calculer $1 - u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$ et « encadrer l'intérieur » pour montrer que $0 \leq 1 - u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

2. Intégrer par parties.

3. La question 2 assure que $1 - u_n = \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ pourvu que $\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par croissance de l'intégrale (« encadrer l'intérieur »), montrer : $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leq \frac{1}{n+1}$.

Pour majorer $\ln(1+x^n)$ se souvenir d'une inégalité classique sur $\ln(1+x)$.

28 **a)** La technique est classique (on généralise la technique de l'exercice 26) : on intègre par parties pour faire apparaître $\frac{1}{n+1}$ par intégration par parties. Précisément une I.P.P. donne

$$\int_0^1 t^n f(t)\,dt = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,dt.$$

Il ne reste qu'à montrer que $\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,dt = o(1)$ *i.e.* tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

b) Faire une nouvelle intégration par parties :

$$\int_0^1 t^n f(t)\,dt = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{f'(1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 t^{n+2} f''(t)\,dt$$

Il suffit alors de montrer que :

- $\frac{f(1)}{n+1} = \frac{f(1)}{n} - \frac{f(1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
- $\frac{f'(1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{f'(1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
- $\frac{1}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 t^{n+2} f''(t)\,dt = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

29 Appliquer l'égalité des accroissements finis à une fonction bien choisie.

30 **1.** Développer $\cos(x-t)$ puis exploiter la dérivabilité en de $x \mapsto \int_0^x f(t)\cos t\,dt$ et de $x \mapsto \int_0^x f(t)\sin t\,dt$.

2. Revenir à la définition de la limite « avec les ε » : utiliser le fait que $|f(t)| \leq \varepsilon$ pour $t \geq A$ et couper l'intégrale en A avec la relation de Chasles.

31 Introduire une primitive F de f et exprimer $n\int_0^1 f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)$ en fonction de taux d'accroissements de F.

32 **1.** Majorer $f(t)$ avec l'inégalité des cordes.

2. Effectuer une I.P.P. sur $\int_0^1 xf(x)\,dx$ en primitivant f en $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ puis minorer F avec la question 1

3. Remarquer que : $a - \frac{1}{4} \leq a^2$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

33 **1.** Suivre le savoir faire **SF 9**

a) Introduire une primitive F de $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis exprimer $G(x)$ en fonction de $F(x)$ et $F(\frac{1}{x})$.

b) Dériver à partir de l'expression obtenue en a). On trouve que $G' = 0$, donc G est constante puis que la constante est nulle en calculant G en un point bien choisi.

2. On trouve $G(x) = -G(x)$ en effectuant le changement de variable proposé.

34 **a)** Suivre le savoir faire **SF 9** : introduire une primitive F de f et exprimer $\varphi(x)$ en fonction de $F(x)$ et $F(-x)$.

b) En deux temps :

- Prolonger φ par continuité en 0 (par exemple à l'aide d'un DL_n 1 de F)
  Réponse : $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f(0)$
- puis appliquer le théorème de la limite de la dérivée : pour le calcul de la limite de
  $$\varphi'(x) = \frac{-F(x)+F(-x)+xf(x)+xf(-x)}{x^2} = \frac{N(x)}{x^2}$$
  on peut calculer un développement limité de $N(x)$ à l'ordre 2 en 0.
  Réponse : $\varphi'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

35 **1.** Introduire une primitive F de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ et exprimer $\varphi(x)$ en fonction de F.

2. Il suffit de montrer que φ possède un développement limité à l'ordre 1 en 0. Calculer un développement limité à l'ordre deux en 0 de F par primitivation.

36 Effectuer le changement de variable $s = t + x^2$ pour mettre $\varphi(x)$ sous la forme $\int_{u(x)}^{v(x)} \operatorname{Arctan} s\,ds$

37 La fonction φ est paire et π-périodique donc il suffit de l'étudier sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
En dérivant, on obtient $\varphi'(x) = 0$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\varphi(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$ donc φ est constante, égale à $\frac{\pi}{4}$.

38 Noter que $\int_0^1 \frac{f(0)}{1+tx}\,dt \underset{x\to+\infty}{=} f(0)\frac{\ln x}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$