1 Après avoir vérifié la liberté, compléter la famille en ajoutant deux polynômes de la base canonique choisis de telle façon que la famille obtenue soit encore libre (on peut prendre par exemple X^3 et X^4). Il s'agit alors de vérifier que la famille ainsi complétée est encore libre

2 **a)** Mettre F sous forme de Vect puis vérifier la liberté de la famille génératrice obtenue.
Une réponse possible est $(1, X^2 - 2X)$. Dans tous les cas on obtient une base formée de deux polynômes.

b) Compléter la base de F en ajoutant deux polynômes de la base canonique choisis de telle façon que la famille obtenue soit encore libre.

3 On peut la compléter en ajoutant le vecteur $\varepsilon_3 = e_1$ ou $\varepsilon_3 = e_3$ (mais pas e_1).
Pour vérifier la liberté de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, en partant de $\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_3 = 0$ puis en remplaçant, on obtiens une CL nulle de (e_1, e_2, e_3). La liberté de cette famille fournit un système de trois équations sur α, β, γ permettant de prouver qu'ils sont tous nuls.

4 $\mathscr{B}$ est de cardinal $3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ donc la liberté suffit.
Pour ce qui est des coordonnées, en notant α, β, γ les réels tels que

$$1 + X + X^2 = \alpha(X-1)^2 + \beta X^2 + \gamma(X+1)^2$$

on peut trouver α, β, γ :

- Ou bien en développant les polynômes $(X+1)^2$ et $(X-1)^2$ puis en identifiant les coefficients.
- Ou bien en évaluant en 1, 0 et -1.

5 Posant $F = \text{Vect}(\cos, \sin)$ il suffit de montrer que f_1, f_2 et f_3 appartiennent à F. En effet, F est de dimension 2 donc toute famille de cardinal 3 est liée.

6 $(P_0, \dots, P_n)$ est de cardinal $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ donc la liberté suffit. Ici la famille est étagée.

7 $(P_0, \dots, P_n)$ est de cardinal $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ donc il suffit de vérifier que la famille est libre.

8 La famille $(u_1, \dots, u_{2p+1})$ est de cardinal $2p+1 = \dim \mathbb{R}^{2p+1}$ donc il suffit de vérifier que la famille est libre.

9 **1.** Etant fixés $n \in \mathbb{N}$ et $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}$ tels que $p_1 < \dots < p_n$. Il s'agit de montrer que la famille $(\ln p_1, \dots, \ln p_n)$ est libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vetoriel $\mathbb{R}$. En écrivant une combinaison linéaire nulle de cette famille puis en multipliant par un dénominateur commun des coefficients (rationnels) de cette combinaison, on obtient

$$a_1 \ln(p_1) + \dots + a_n \ln(p_n) = 0$$

pour certains **entiers** $a_1, \dots, a_n$ et il s'agit de montrer que $a_1 = \dots = a_n = 0$.

L'égalité ci-dessus donne $\prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i} = 1$ et, dans le cas particulier (plus simple) où les a_i sont tous positifs, l'unicité de la décomposition en facteurs premiers assure que $a_1 = \dots = a_n = 0$.
Dans le cas général, en notant $I = \{i \in [\![1, n]\!] \mid a_i \geq 0\}$ et $J = \{i \in [\![1, n]\!] \mid a_i < 0\}$ on obtient $\prod_{i \in I} p_i^{a_i} = \prod_{i \in J} p_i^{a_i}$ et on conclut de même.

2. La question 1 assure l'existence d'une famille libre infinie.

10 **1.** Montrer que $\mathscr{F}$ est génératrice mais aussi liée (grâce à la stricte positivité des coefficients).
Pour la construction d'une famille de cardinal $n+1$, considérer par exemple une base $\mathscr{B} = (b_1, \dots, b_n)$ de E prendre $a = -b_1 - \dots - b_n$ et vérifier que $\mathscr{F} = (b_1, \dots, b_n, a)$ convient.

2. Extraire une base de $\mathscr{F}$. Quitte à renuméroter les vecteurs, on peut supposer que $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E. Posant $a = -u_1 \cdots - u_n$, il suffit en fait de montrer que a est combinaison linéaires à coefficients positifs ou nuls des $(u_i)_{i \in I}$ où $[\![n+1, p]\!] \not\subset I$.
Pour cela noter que :

- a est une CL à coefficients strictement positifs de $\mathscr{F}$.
- la famille $(u_{n+1}, \dots, u_{2p})$ est liée

En écrivant une relation de liaison entre $(u_{n+1}, \dots, u_{2p}$, on peut écrire, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i + \sum_{i=n+1}^{2p} (\alpha_i + t\lambda_i)$$

pour certains $\alpha_1, \dots, \alpha_{2p} > 0$ et certains réels $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{2p}$ qui peuvent être des signe quelconque. Choisir judicieusement la valeur de t pour annuler un des coefficients de la seconde somme et obtenir des coefficients positifs ou nuls pour les autres.
Concernant le contre-exemple demandé, considérer la famille $(b_1, \dots, b_n, -b_1, \dots, -b_n)$ où $\mathscr{B} = (b_1, \dots, b_n)$ est une base de E.

11 En deux étapes :

- *Etape 1 : Déterminer la dimension de $\mathscr{C}(D)$.*
En écrivant $\mathscr{C}(D)$ sous forme de Vect on constate qu'il s'agit de l'ensemble des matrices diagonales donc que $\mathscr{C}(D)$ est de dimension n.
- *Etape 2 : Prouver la liberté de $(I_n, D, \dots, D^{n-1})$.*
La famille étant de cardinal $n = \dim \mathscr{C}(D)$, la liberté suffit.
Etant donnés $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ tels que
$$\alpha_0 I_n + \alpha_1 D + \dots + \alpha_{n-1} D^{n-1} = 0$$
Observer les coefficients diagonaux de la CL ci-dessus et considérer le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$.

12 Poser
$F = \text{Vect}(X^3 + X^2 - X - 1, X^3 - X^2 + 1, X^3 - X^2 + X, X^3 + 2X + 1)$ et procéder par inclusion dimension.

13 La famille (u, v, w) n'est pas libre donc ce n'est pas une base de F, c'en est seulement une famille génératrice.
Constater que $u = 4v - 3w$ donc $F = \text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(v, w)$, et (v, w) est libre.

14 **1.** Plusieurs méthodes :

- *Méthode 1.* Par inclusion-dimension.
- *Méthode 2.* Par double-inclusion.
- *Méthode 3.* Par équivalence. Etant donné $P \in \mathbb{R}_n[X]$ écrire $P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i$ et montrer que $P \in F$ ssi $\alpha_0 = 0$.

2. Montrer que :

- $\dim F + \dim G = n+1$. Il reste à montrer que G est de dimension 1. Ici encore on peut mettre G simplement sous forme de vect en se rappelant que $P \in G$ signifie $(X-x_1)^n \mid P$.
- $F \cap G = \{0\}$. Si $P \in F \cap G$, compter le nombre de racines de P.

3. $H = \mathrm{Vect}(L_1)$ convient (par exemple).

15 Il s'agit d'écrire F comme un vect, ce que les formules donnat l'expression de u_n en fonction de n permettent de faire. La résolution de l'équation caractéristique permet d'écrire les suites de F comme combinaisons linéaires de deux suites. Ici les suites sont à termes dans $\mathbb{C}$ donc distinguer deux cas selon que le discriminant est nul ou non :

- *Si* $a \neq -2i$. L'équation caractéristique a deux racines distinctes, on obtient $F = \mathrm{Vect}(p,q)$ où p et q sont les suites géométriques $p = \left(2^n(a+i)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $q = \left((-2i)^n\right)$.
- *Si* $a = -2i$. L'équation caractéristique a une racine double, on obtient $F = \mathrm{Vect}(q,r)$ où $r = \left(n(-2i)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

16 Poser $F = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n)$ et noter que :

- $\mathrm{rg}(u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n) = \dim F$
- $(u_1+v_1,\dots,u_n+v_n)$ est une famille libre de F.

17 Par l'absurde, si $\mathrm{rg}(f_1',\dots,f_n') \leq n-2$ alors deux des f_i' sont CL des autres, par exemple f_{n-1}' et f_n' sont CL de $f_1',\dots,f_{n-2}'$:

- $f_{n-2}' = \alpha_1 f_1' + \dots + \alpha_{n-2} f_{n-2}'$;
- $f_{n-1}' = \beta_1 f_1' + \dots + \beta_{n-2} f_{n-2}'$;

Ceci permet d'écrire

- $f_{n-2} + C = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_{n-2} f_{n-2}$;
- $f_{n-1} + D = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_{n-2} f_{n-2}$;

En combinant les deux égalités, on forme une combinaison linéaire nulle des f_i dont certains coefficients sont non nuls.

18 **1.** Considérer une base (f_1,f_2) de F et décomposer $\tau_x f$ dans cette base pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ceci permet d'écrire :

$$\forall t,x \in \mathbb{R}, \quad f(x+t) = \alpha(x)f_1(t) + \beta(x)f_2(t) \quad (\star)$$

pour certaines fonctions α et β.
Sous réserve de dérivabilité des fonctions α et β, le résultat demandé s'obtient en dérivant $(\star)$ par rapport à x puis en évaluant en $x=0$.
Pour justifier la dérivabilité de α et β, il suffit d'exprimer explicitement α et β en fonction de f. Pour cela, écrire par exemple $(\star)$ en $t=0$ ce qui permet de voir $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ comme solution du système :

$$\begin{cases} \alpha(x)f_1(t) + \beta(x)f_2(t) = f(x+t) \\ \alpha(x)f_1(0) + \beta(x)f_2(0) = f(t) \end{cases}$$

Il suffit de justifier que le déterminant de ce système est non-nul pour au moins une valeur de t (utiliser la liberté de (f_1,f_2)) pour ensuite exprimer α et β comme des combinaisons linéaires des fonctions f et $\tau_x(f)$.

2. Constater que la famille (f,f',f'') est liée.

19 **1.** Montrer c'est une sous-algèbre de $\mathbb{C}$.

2. Si z est annulé par un polynôme P de degré d, montrer que $\mathbb{Q}[z] \subset \mathrm{Vect}(z_k)_{0\leq k\leq d-1}$ à l'aide d'une division euclidienne.

20 Utiliser la formule de Grassmann.

21 Il suffit de montrer que $G \subset F$.
Fixer $x \in G$. Vu que $G \subset G+H$ et que $G+H = F+H$, il en résulte que $x \in F+H$.
Ecrire ainsi $x = y+z$ avec $y \in F$ et $z \in H$.
Pour montrer que $x \in F$, il reste à montrer que $z \in F$. Pour cela, montrer que $z \in H \cap G$ et utiliser l'hypothèse $H \cap G = F \cap H$.

22 **a)** Vérifier que (x,y) et (u,v,w) sont des familles libres ce qui assurera que $\dim F = 2$ et $\dim G = 3$.
Pour $F+G$ on peut écrire $F+G = \mathrm{Vect}(u,v,w,x,y)$ mais la famille (u,v,w,x,y) n'est pas libre (cinq vecteurs dans $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4).
Par contre on sait que $\dim F+G \leq 4$ et on vérifie que (u,v,w,x) est libre donc $\dim F+G \geq 4$.

b) Grassmann assure que $\dim(F\cap G) = 1$.
Il suffit d'en trouver un vecteur non nul.
D'après la question a) on peut exprimer y en fonction de (u,v,w,x) : on trouve $2u+2v-w+x = y$.
Cela donne $\underbrace{2u+2v-w}_{\in F} = \underbrace{y-x}_{\in G} = (1,1,-1,-1) \in F \cap G$

23 **a)** Vérifier que

- $\dim F + \dim G = 3$
- $F \cap G = \{(0,0,0)\}$.

b) Il suffit de trouver une base de F et d'y adjoindre $(1,0,0)$.

24 **a)** Pour tout $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$u \in F \cap G \iff \begin{cases} x-y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

On trouve $F \cap G = \mathrm{Vect}\big((1,1,0)\big)$

b) Procéder par inclusion-dimension pour montrer que $F+G = \mathbb{R}^3$.

25 **a)** Ecrire F comme un vect (fixer $P = aX^3+bX^2+cX+d \in \mathbb{R}_3[X]$ puis calculer $P(X^2)$ et $X^2P(X)$ et identifier les coefficients pour former un système) on trouve $F = \mathrm{Vect}(X^2)$.

b) On trouve que $\dim G = 3$.

c) Vérifier que

- $\dim F + \dim G = 4$
- $F \cap G = \{0\}$ (fixer $P \in F \cap G$ puis traduire chaque condition : $P \in F$ donc P est de la forme λX^2 et $P \in G$ donc $P(-1) = P(2)$).

26 Déterminer un base de F, on trouve que F est de dimension 2. Ensuite on peut construire G comme le sous-esapce engendré par les polynômes de la base canonique choisis pour compléter le base de F : ici $G = \mathrm{Vect}(1,X)$ convient.

27 Fixer $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ puis montrer par analyse-synthèse qu'il existe un unique couple (S,A) de matrices tel que : • $S+A = M$ • $S \in \mathscr{S}_n$ • $A \in \mathscr{A}_n$

28 Fixer $\varphi \in E$ puis montrer par analyse-synthèse qu'il existe un unique couple (f,C) tel que : • $f+C = \varphi$ • $f \in E$ • $C \in G$

29 L'ensemble G des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $n-1$ convient. Le vérifier par analyse-synthèse.