Algorithme de la base incomplète

1 SF 3 Montrer que la famille
$$(X^3+X^2+X+1\,,\, X^3+X^2+1\,,\, X^3+2X^2+X)$$
est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}_4[X]$.

2 SF 3 On pose : $F=\{P\in\mathbb{R}_3[X] \mid P(X+1)=P(1-X)\}$. Déterminer une base de F puis la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$

3 SF 3 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et (e_1,e_2,e_3) une base de E.
On pose : $\varepsilon_1=e_1+2e_2+2e_3$ et $\varepsilon_2=e_2+e_3$.
Montrer que la famille $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ est libre et compléter celle-ci en une base de E.

Familles libres/génératrices

4 SF 4 Montrer que $\mathscr{B}=\left((X-1)^2, X^2, (X+1)^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner les coordonnées de $1+X+X^2$ dans $\mathscr{B}$

5 Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$. On considère les fonctions
$f_1 : x\mapsto \sin(x+a)$, $f_2 : x\mapsto\sin(x+b)$ et $f_3 : x\mapsto \sin(x+c)$
Montrer que la famille (f_1,f_2,f_3) est liée.

6 SF 4 Soit $n\geq 1$. On pose : $P_k=(X+1)^{k+1}-X^{k+1}$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$. Montrer que $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

7 SF 4 Soit $n\geq 1$. Pour $k\in[\![0,n]\!]$, on pose $P_k=X^k(1-X)^{n-k}$.
Montrer que $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

8 SF 4 Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Dans $\mathbb{R}^{2p+1}$, on pose : $u_1=(1,1,0,\dots,0)$, $u_2=(0,1,1,0,\dots,0)$, $u_{2p}=(0,\dots,0,1,1)$ et $u_{2p+1}=(1,0,\dots,0,1)$
Montrer que $(u_1,\dots,u_{2p+1})$ est une base de $\mathbb{R}^{2p+1}$.

9 SF 3 SF 4 Soient $d_1,\dots,d_n\in\mathbb{R}$, tous distincts. On note D la matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_1,\dots,d_n$ et $\mathscr{C}(D)$ l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec D. Montrer que $(D^k)_{0\leq k\leq n-1}$ est une base de $\mathscr{C}(D)$.

10 SF 2 On peut munir $\mathbb{R}$ d'une structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel (les vecteurs sont les nombres réels et les scalaires sont les rationnels).
1. Montrer que la famille $(\ln p)_{p\in\mathbb{P}}$ est libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.
2. Que dire de la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$?

11 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n\geq 1$.
Une famille $\mathscr{F}$ de vecteurs de E est dite *positivement génératrice* si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ à coefficients *strictement* positifs.
On fixe pour la suite une telle famille $\mathscr{F}=(u_1,\dots,u_p)$.
1. Montrer que $p\geq n+1$. Donner un exemple de famille positivement génératrice de E de cardinal $n+1$.
2. On suppose que $p\geq 2n+1$. Montrer que $\mathscr{F}$ possède une sous-famille stricte encore positivement génératrice. Donner un exemple de famille positivement génératrice de cardinal $2n$ dont aucune sous-famille stricte ne l'est.

Sous-espaces vectoriels en dimension finie

12 SF 5 Montrer que :
$$\mathrm{Vect}\left(X^3+X^2-X-1, X^3-X^2+1, X^3-X^2+X, X^3+2X+1\right)=\mathbb{R}_3[X]$$

13 SF 3 Déterminer la dimension de $F=\mathrm{Vect}\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ où :
$\vec{u}=(3,0,-2)$, $\vec{v}=(0,3,1)$ et $\vec{w}=(-1,4,2)$

14 SF 4 Soient $x_0,\dots,x_n\in\mathbb{R}$, distincts. On note $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ la famille des polynômes de Lagrange associés à $x_0,\dots,x_n$ et on pose : $F=\{P\in\mathbb{R}_n[X] \mid P(x_0)=0\}$.
1. Montrer que $F=\mathrm{Vect}(L_1,\dots,L_n)$.
2. On pose :
$$G=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X] \mid P(x_1)=P'(x_1)=\dots=P^{n-1}(x_1)=0\right\}$$
Montrer que : $F\oplus G=\mathbb{R}_n[X]$.
3. Trouver un sous-espace $H\neq G$ tel que : $F\oplus H=\mathbb{R}_n[X]$.

15 SF 3 *cf Ex. 55, banque INP* Soit $a\in\mathbb{C}$.
On note F l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=2au_{n+1}+4(ia-1)u_n$$
Déterminer, suivant la valeur de a, une base de F.

16 SF 6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n\in E$. On suppose que la famille $(u_1+v_1,\dots,u_n+v_n)$ est libre. Montrer l'inégalité : $\mathrm{rg}(u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n)\geq n$.

17 SF 6 Soit $(f_1,\dots,f_n)$ une famille libre de fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que : $\mathrm{rg}(f_1',\dots,f_n')\geq n-1$.

18 Soit $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on note $\tau_x(f)$ la fonction $t\mapsto f(x+t)$ et on pose : $F=\mathrm{Vect}\left(\tau_x(f)\right)_{x\in\mathbb{R}}$.
On suppose que $\dim F=2$
1. Montrer que $f'\in F$ et $f''\in F$.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

19 SF 10 On munit $\mathbb{C}$ d'une structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel (les scalaires sont les nombres rationnels).
- Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on pose : $\mathbb{Q}[z]=\{P(z)\,;\, P\in\mathbb{Q}[X]\}$.
- Un complexe z est dit *algébrique* s'il existe $P\in\mathbb{Q}[X]$, non nul, tel que $P(z)=0$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}[z]$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre.
2. Soit $z\in\mathbb{C}$. Montrer que z est algébrique si et seulement si $\mathbb{Q}[z]$ est de dimension finie sur $\mathbb{Q}$.
3. On note $\overline{\mathbb{Q}}$ l'ensemble des nombres algébriques. Montrer que $\overline{\mathbb{Q}}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Sommes de sous-espaces

20 SF 6 Soient F, G deux sous-espaces de dimension 3 de $\mathbb{R}^5$. Montrer que $F \cap G$ possède un vecteur non nul.

21 SF 5 Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $F \subset G$.
On suppose que : $F + H = G + H$ et $F \cap H = G \cap H$.
Montrer que : $F = G$.

22 SF 7 Dans $\mathbb{R}^4$, on pose : $u = (0,1,-1,0)$, $v = (1,0,1,0)$, $w = (1,1,1,1)$, $x = (0,0,1,0)$ et $y = (1,1,0,-1)$.
On pose enfin : $F = \mathrm{Vect}(x, y)$ et $G = \mathrm{Vect}(u, v, w)$.

a) Déterminer les dimensions de : F, G et $F + G$.

b) Déterminer la dimension et une base de $F \cap G$

23 SF 8 On pose :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + 4z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}((1,0,0))$$

a) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

b) Donner une base adaptée à cette somme directe.

24 SF 7 On pose : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$.

a) Donner une base de $F \cap G$.

b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F + G$. La somme est-elle directe ?

25 SF 8 On pose : $F = \left\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X^2) = X^2 P(X)\right\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(-1) = P(2)\}$.

a) Trouver une base de F.

b) Déterminer la dimension de G.

c) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

26 SF 9 On pose : $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$.
Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$. On précisera une base adaptée à cette somme directe.

27 SF 8 Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}_n$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathscr{A}_n$ des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

28 SF 8 On note E l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose : $F = \left\{f \in E \mid \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0\right\}$
et on note G l'ensemble des fonctions constantes sur $[0,1]$.
Montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires dans E.

29 SF 8 Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, distincts. On note E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on pose

$$F = \{f \in E \mid f(x_1) = \cdots = f(x_n) = 0\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, puis déterminer un supplémentaire de F dans E.