1 *Réponses :*
a) Oui **b)** Non **c)** Non **d)** Non

2 *Réponses :*
a) Non **b)** Oui **c)** Oui **d)** Non

3 *Réponses :*
a) Oui **b)** Non **c)** Oui **d)** Non
e) Non **f)** Oui

4 Si $F \subset G$ (ou $G \subset F$), le résultat est simple vu que $F \cup G = G$ (ou F).
Réciproquement, si $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E, procéder par l'absurde en supposant :
- qu'il existe un $x \in F$ tel que $x \notin G$.
- qu'il existe un $y \in G$ tel que $y \notin F$.

Montrer alors que $x + y \notin F \cup G$.

5 Procéder par l'absurde et considérer l'entier $p \in [\![1, n-1]\!]$ maximal tel que $\bigcup_{i=1}^{p} F_i \neq E$.
Fixer alors $x \in \bigcup_{i=1}^{p} F_i \setminus F_{p+1}$ et $y \in F_{p+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{p} F_i$ puis montrer :
- que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$: $x + \lambda y \notin F_{p+1}$
- que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, il existe au plus un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x + \lambda y \in F_i$.

Obtenir une contradiction en choisissant λ tel que $x + \lambda y$ n'appartienne pas à $\bigcup_{i=1}^{p+1} F_i$

6 *Réponses :*
a) Non **b)** Oui **c)** Oui **d)** Non

7 La question est :
Existe-t-il $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha u + \beta v = (1, m, 1)$?
Il s'agit de savoir si le système : $\alpha u + \beta v = (1, m, 1)$ est compatible.
Il suffit d'échelonner le système (méthode du pivot), on trouve une dernière ligne qui vaut : $0 = (1-m)(2+m)$.
Réponse : la CNS est $m \in \{1, -2\}$

8 Procéder par double inclusion.
- Pour montrer : $\mathrm{Vect}(f_0, \dots, f_n) \subset \mathrm{Vect}(g_0, \dots, g_n)$: il s'agit de montrer que chaque f_k est CL de $g_0, \dots g_n$.
  Il suffit de linéariser :
  $$\cos^k x = \frac{1}{2^k}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^k$$
  Puis développer à l'aide de la formule du binôme et prendre la partie réelle de la somme.
- Pour montrer : $\mathrm{Vect}(g_0, \dots, g_n) \subset \mathrm{Vect}(f_0, \dots, f_n)$: il s'agit de montrer que chaque g_k est CL de $f_0, \dots f_n$.
  Dit autrement, il s'agit d'exprimer $\cos(kx)$ comme un polynôme en $\cos x$.
  Il suffit de délinéariser :
  $$\cos(kx) = \mathrm{Re}\Big((\cos x + i \sin x)^k\Big)$$
  Développer $(\cos x + i \sin x)^k$ à l'aide de la formule du binôme.
  Ensuite prendre la partie réelle de la somme : il s'agit des termes donnant des puissances paires de i. Remplacer enfin tous les $\sin^2$ par $(1 - \cos^2)$.

9 *Réponses :*
1. $\mathscr{F}_1$ est libre.
2. $\mathscr{F}_a$ est libre ssi $a \notin \{-2, 1\}$.

10 *Réponses :*
1. (P_1, P_2, P_3) est liée.
2. (P_1, P_2, P_3) est libre (évaluer).

11 Soient $\alpha, \beta \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\alpha \times (1)_{n\in\mathbb{N}} + \beta \times (n)_{n\in\mathbb{N}} + \gamma \times (n^2)_{n\in\mathbb{N}} = \underbrace{0}_{\text{suite nulle}}$$
Cela signifie : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}}$, $\alpha + \beta n + \gamma n^2 = 0$
On dispose d'une infinité de contraintes imposées sur α, β, γ (une pour chaque $n \in \mathbb{N}$), il suffit de sélectionner trois valeurs de n (par ex. $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$) pour obtenir un système de trois équations qui imposent $\alpha = \beta = \gamma = 0$

12 Soient $\alpha, \beta \gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = \underbrace{0}_{\text{fonction nulle}}$
Cela signifie : $(\star)$ $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}}$, $\alpha e^x + \beta e^{2x} + \gamma e^{x^2} = 0$
Plusieurs méthodes sont possibles pour montrer que ce qui précède impose $\alpha = \beta = \gamma = 0$
- *Méthode 1 : par évaluations.* On évalue $(\star)$ en 0, 1 et 2 pour obtenir trois équations qui imposent $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
- *Méthode 2 : limites en* $+\infty$. On divise $(\star)$ par e^{x^2} puis on fait tendre x vers $+\infty$: il reste $\gamma = 0$.
  On divise ensuite $(\star)$ par e^{2x} puis on fait tendre x vers $+\infty$: il reste $\beta = 0$.
  Dès lors, α est nécessairement nul.
- *Méthode 3 :à l'aide d'un* DL_2. On fait un DL_2 de la fonction $g : x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{2x} + \gamma e^{x^2}$. On obtient
  $$g(x) = (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha + 2\beta)x + \left(\frac{\alpha}{2} + 2\beta + \gamma\right)x^2 + o(x^2)$$
  Par ailleurs g est nulle (donc on connait son DL_2 qui est $g(x) = 0 + 0x + 0x^2 + o(x^2)$) et l'unicité des coefficients d'un DL impose $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \frac{\alpha}{2} + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases}$ d'où l'on tire $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

13 **1.** Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = \underbrace{0}_{\text{fonction nulle}}$$
Cela signifie : $(\star)$ $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},}$ $\alpha_0 + \alpha_1 e^x + \cdots + \alpha_n e^{nx} = 0$
Plusieurs méthodes sont possibles pour montrer que ce qui précède impose $\alpha_0 = \cdots = \alpha_n = 0$, par exemple :
- *Méthode 1 : limites en* $+\infty$. On fait tendre x vers $+\infty$: il reste $\alpha_0 = 0$.
  On multiplie ensuite $(\star)$ par e^{-x} puis on fait tendre x vers $+\infty$: il reste $\alpha_1 = 0$.
  Puis, successivement, $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$.
- *Méthode 2 : à l'aide d'un polynôme.* Si on note P le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$, alors la relation $(\star)$ s'écrit
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(e^x) = 0$$
  cela permet d'exhiber une infinité de racines pour P.

2. Il suffit de montrer la liberté de toute sous-famille finie. Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $(f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_n})$ est libre. Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{\lambda_i} = \underbrace{0}_{\text{fonction nulle}}$$

Cela signifie : $(\star)$ $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},}$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i x} = 0$

Plusieurs méthodes sont encore possibles pour montrer que ce qui précède impose $\alpha_0 = \cdots = \alpha_n = 0$, par exemple :

- *Méthode 1 : limites en* $+\infty$. On peut adapter la méthode 1 de la question 1.
- *Méthode 2 : à l'aide des polynômes de Lagrange*. En dérivant k fois la relation $(\star)$ puis en évaluant en $x = 0$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k = 0$$

En combinant ces relations on obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(\lambda_i) = 0$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.
En choisissant $P = L_j$ où L_j est le j^{e} polynôme de Lagrange associé aux points $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la somme se réduit à $\lambda_j = 0$.

14 On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre (on se ramène à une famille finie).
Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = \underbrace{0}_{\text{fonction nulle}}$$

Cela signifie :
$(\star)$ $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}}$, $\quad \alpha_0 \sin x + \alpha_1 \sin(2x) + \cdots + \alpha_n \sin(2^n x) = 0$
Evaluer successivement en $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{4}$, ..., $x = \frac{\pi}{2^{k+1}}$, ..., $x = \frac{\pi}{2^{n+1}}$, pour montrer successivement que $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$, ..., $\alpha_n = 0$.

15 Par l'absurde, former une combinaison linéaire nulle à coefficients non-tous nuls, puis dériver et considérer un équivalent en 0.

16 Former une combinaison linéaire nulle puis utiliser la méthode du cache pour montrer que tous les coefficients sont nuls.

17 *Il est possible d'adapter la démonstration du cours qui permet de montrer que si $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre et si u_{n+1} n'est pas CL de $(u_1, \ldots, u_n)$ alors $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ est libre.*

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (u_k + a) = 0$.

On peut écrire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = -\underbrace{\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\Big)}_{S} a.$

Utiliser les hypothèses de l'exercice pour justifier :

- D'abord que $S = 0$ (procéder par l'absurde)
- Ensuite que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0$.

18 Procéder par récurrence sur n.

19 **1.** Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.
Il s'agit de montrer que $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre.
Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

En remplaçant les v_i par $u_1 + \cdots + u_i$, on obtient une CL nulle des u_i

$$(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) u_1 + (\alpha_2 + \cdots + \alpha_n) u_2 + \cdots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n) u_{n-1} + \alpha_n u_n = 0$$

La liberté de $(u_1, \ldots u_n)$ impose

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 & + & \ldots & & & + & \alpha_n & = & 0 \\ & & \alpha_2 & + & \ldots & + & \alpha_n & = & 0 \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & \alpha_n & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.
Réciproquement, si $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre.
Il s'agit de montrer que $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.
Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$$

En remarquant que $u_1 = v_1$ puis que $u_i = v_i - v_{i-1}$ pour $i \geq 1$, on peut procéder de même que dans le cas précédent en remplaçant les u_i puis en formant une CL nulle des v_i.

2. Si $(v_1, \ldots, v_n)$ est génératrice, alors $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n) = E$.
Or les v_i sont des CL de $(u_1, \ldots, u_n)$ donc $v_1, \ldots, v_n \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ donc $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n) \subset \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.
La réciproque se traite de même vu que les u_i sont des CL de $(v_1, \ldots, v_n)$.

20 **1.** On écrit E sous la forme d'un Vect, ce qui donne une famille génératrice de E.
On justifie ensuite la liberté de la famille obtenue.

2. On écrit E sous la forme d'un Vect, ce qui donne une famille génératrice de E.
On justifie ensuite la liberté de la famille obtenue.

3. Ici $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.
La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) génératrice de E mais cette famille n'est pas libre.
Il suffit de « chasser » du Vect les vecteurs qui sont CL des autres (par ex. u_3 et u_4 sont CL de u_1 et u_2)

21 **1.** Ici $E = \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3)$.
La famille $((P_1, P_2, P_3)$ génératrice de E mais cette famille n'est pas libre.
Il suffit de « chasser » du Vect les polynômes qui sont CL des autres.

2. On écrit E sous la forme d'un Vect (fixer $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$ puis traduire les conditions par des équations sur a, b, c, d).
On justifie ensuite la liberté de la famille obtenue.

3. On écrit E sous la forme d'un Vect (fixer $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$ puis traduire les conditions par des équations sur a, b, c, d).
On justifie ensuite la liberté de la famille obtenue.

22 **a)** Vérifier que :

- I_2 commute avec A
- $\mathscr{C}$ est stable par combinaison linéaires *i.e.* que si $M, N \in \mathscr{C}$ et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda M + \mu N)A = A(\lambda M + \mu N)$.
- $\mathscr{C}$ est stable par produit *i.e.* que si $M, N \in \mathscr{C}$ et alors $(MN)A = A(MN)$.

b) Ecrire $\mathscr{C}$ sous forme de Vect.

Fixer $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Réponse Une base est (B, I_2) où $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$.

23 En écrivant P et Q en fonction de leurs coefficients on obtient directement $F = \text{Vect}(f_0, \dots, f_n, g_0, \dots, g_n)$ où $f_k : x \mapsto x^k \sin x$ et $g_k : x \mapsto x^k \cos x$.
A ce stade on sait donc que F est un sev de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on dispose d'une famille génératrice.
Pour la liberté, si $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_0, \dots, \beta_n$ sont tels que

$$\alpha_0 f_0 + \cdots + \alpha_n f_n + \beta_0 g_0 + \cdots + \beta_n g_n = 0$$

refaire intervenir les polynômes en posant

$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{n} \beta_k X^k$$

Il s'agit de montrer que P et Q sont nuls.
Or on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x)\sin x + Q(x)\cos x = 0$$

En évaluant en des points bien choisis , on trouve une infinité de racines pour P et une infinité de racines pour Q (annuler cos ou annuler sin).

24 Montrer qu'une base de F est la famille $(f_i)_{0 \le i \le n}$ de F où pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, la fonction f_i est la fonction affine par morceau telle que : $\quad f_i(x_i) = 1 \quad$ et $\quad f_i(x_j) = 0 \quad$ si $j \neq i$.
Etant fixée $f \in F$, on peut montrer que f est, de manière unique, combinaison linéaire des f_i. Précisément, on montre par analyse synthèse que l'unique décomposition de f comme combinaison linéaire des f_i est : $\quad f = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f_i$.