Sous-espaces vectoriels

1 SF 1 Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

a) $F_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y\right\}$ **b)** $F_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y = 1\right\}$

c) $F_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\right\}$ **d)** $F_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\right\}$

2 SF 1 Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

a) L'ensemble F_1 des fonctions croissantes.
b) L'ensemble F_2 des fonctions bornées.
c) L'ensemble F_3 des fonctions f vérifiant $f(1) = 0$.
d) L'ensemble F_4 des fonctions f vérifiant $f(0) = 1$.

3 SF 1 Déterminer si les ensembles suivants sont ou non des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels :

a) L'ensemble : $F_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(X) = XP'(X) + P(0)\}$
b) L'ensemble : $F_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P(X) \geq 3\}$
c) L'ensemble F_3 des suites qui convergent vers 0.
d) L'ensemble F_4 des suites géométriques.
e) L'ensemble F_5 des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y'' + 5y = \cos t$.
f) L'ensemble F_6 des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $(1+t^2)y'' + ty' - 3t^2 y = 0$

4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels stricts de E. Montrer que $F_1 \cup \dots \cup F_n \neq E$.

Combinaisons linéaires

6
1. Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $u = (4,1,0)$ est-il combinaison linéaire de $e_1 = (1,-1,2)$ et $e_2 = (1,1,-1)$?
2. Dans $\mathbb{R}[X]$, $P = 16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$ est-il combinaison linéaire de $A = 8X^3 - 5X^2 + 1$ et $B = X^2 + 7X - 2$.
3. Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la fonction $g : x \mapsto \cos^2 x$ est-elle combinaison linéaire de $f_1 : x \mapsto 1$ et $f_2 : x \mapsto \cos(2x)$.
4. Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la fonction $f : x \mapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire de sinus et cosinus ?

7 Soit $m \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1,1,m)$ et $v = (m,1,1)$. A quelle condition nécessaire et suffisante sur m le vecteur $(1,m,1)$ appartient-il à $\mathrm{Vect}(u,v)$?

8 SF 5 Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on pose : $f_k(x) = \cos^k x$ et $g_k(x) = \cos(kx)$.
Montrer que : $\mathrm{Vect}(f_k)_{0\leq k\leq n} = \mathrm{Vect}(g_k)_{0\leq k\leq n}$

Familles libres

9 SF 2 Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$?

a) $\mathscr{F}_1 = ((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$.
b) $\mathscr{F}_a = ((1,1,a),(1,a,1),(a,1,1))$ où $a \in \mathbb{R}$.

10 SF 2 Dans chacun des cas suivants, la famille (P_1,P_2,P_3) est-elle une famille libre de $\mathbb{R}[X]$?

a) $P_1 = 1 + X^2$, $P_2 = 2 + X + X^2$, $P_3 = 1 + X$.
b) $P_1 = (X-1)(X-2)$, $P_2 = (X-1)(X-3)$, $P_3 = (X-2)(X-3)$.

11 SF 2 Montrer que les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

12 SF 2 Montrer que $f_1 : x \mapsto e^x$, $f_2 : x \mapsto e^{2x}$, $f_3 : x \mapsto e^{x^2}$ forment une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

13 SF 2 Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note f_λ la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(f_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille libre
2. Montrer que $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est une famille libre.

14 SF 2 Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f_k(x) = \sin(2^k x)$.
Montrer que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

15 SF 2 Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f_k(x) = \cos(x^k)$.
Montrer que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

16 SF 2 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $F_k = \dfrac{1}{X-k}$. Montrer que $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}(X)$.

17 SF 2 Soit $(u_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $a \notin \mathrm{Vect}(u_i)_{1\leq i\leq p}$. Montrer que $(u_i + a)_{1\leq i\leq p}$ est libre.

18 SF 2 Soit G un groupe.
Soit $f_1,\dots,f_n$ des morphismes de groupes distincts de G dans $\mathbb{C}^*$. Montrer que $(f_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille libre de $\mathscr{F}(G,\mathbb{C})$.

Bases

19 SF 2 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u_1,\dots,u_n \in E$.
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose : $v_k = u_1 + \dots + u_k$.

1. Montrer que $(u_1,\dots,u_n)$ est libre ssi $(v_1,\dots,v_n)$ l'est.
2. Montrer que $(u_1,\dots,u_n)$ est génératrice de E ssi $(v_1,\dots,v_n)$ l'est.

20 SF 3 Dans chacun des cas suivants, déterminer une base de l'espace vectoriel E :

a) $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\right\}$
b) $E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } 2x - z + t = 0\right\}$
c) $E = \mathrm{Vect}\big((1,3,0,1),(3,2,1,4),(8,3,3,11),(5,8,1,6)\big)$

21 SF 3 Dans chacun des cas suivants, déterminer une base de l'espace vectoriel E :

a) $E = \mathrm{Vect}(2X+1, X+3, 4X+7)$
b) $E = \left\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$
c) $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$

22 SF 10 On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ et on note $\mathscr{C}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A *i.e.* telles que $MA = AM$.

a) Montrer que $\mathscr{C}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
b) Déterminer une base de $\mathscr{C}$.

23 SF 3 On pose $F = \{x \mapsto P(x)\sin x + Q(x)\cos x\ ,\ P,Q \in \mathbb{R}_n[X]\}$.
Montrer que F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

24 Soient $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ tels que $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$. On note F le sous-espace de $\mathscr{C}([0,1]\ \mathbb{R})$ formé des fonctions continues sur $[0,1]$ dont la restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est affine. Déterminer une base de F.