I Généralités sur les espaces vectoriels

1 La structure d'espace vectoriel

Définition 1

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel, est un *ensemble* E muni de deux lois :

i) une loi de composition interne $+$ appelée addition telle que :

ii) une multiplication externe *i.e.* une application :

qui vérifie les quatre propriétés suivantes :

1.

2.

3.

4.

• **Vocabulaire.** • Les éléments de E sont appelés vecteurs • Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires

• L'élément neutre de $(E,+)$ est appelé :

Exercice 1 — **1.** Soit $\vec{x} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Démontrer : $\boxed{\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}_E \iff \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0}$

2. Soit $\vec{x} \in E$. Montrer que : $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$

2 Espaces vectoriels de référence

Exemple 0 — $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : la multiplication « externe » est la multiplication $\times$ de $\mathbb{K}$

Exemple 1 $\boxed{\mathbb{K}^n}$ — pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble des n-uplets à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 2 $\boxed{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ — Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des matrices de taille (n,p) est un $\mathbb{K}$-ev.
(La somme $A+B$ et la multiplication par un scalaire λA ont été définies au chapitre « Calcul matriciel »)

Exemple 3 $\boxed{\mathbb{K}[X]}$ — L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
(La somme $P+Q$ et la multiplication par un scalaire λP ont été définies au chapitre « Polynômes »)

Exemple 4 $\boxed{\mathcal{F}(X, \mathbb{R})}$ — Si X est une partie de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour l'addition des fonctions et leur multiplication par un réel.
Plus généralement si E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque et X un ensemble non vide, l'ensemble $\mathcal{F}(X,E)$ des fonctions de X dans E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour les opérations usuelles sur les fonctions).

Exemple 5 $\boxed{E \times F}$ — Si E, F sont deux $\mathbb{K}$-e.v., on définit sur $E \times F$ une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
La construction se généralise à $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ où $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Exercice 2 — Donner la définition des deux opérations dans $\mathbb{K}^n$ et préciser le vecteur nul $\vec{0}_{\mathbb{K}^n}$.

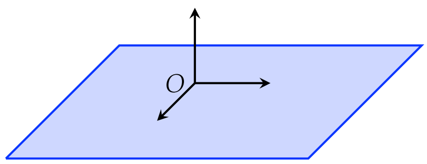
Exercice 3 — L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

• **Remarque.** Tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel est aussi :

3 Combinaisons linéaires de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

• **Remarque.** Une combinaison linéaire deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$ est un vecteur de la forme :



Définition 2

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ une *famille* de vecteurs E. Un vecteur $\vec{x} \in E$ est une combinaison linéaire de la famille $\mathcal{F}$ (ou des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$) si :

• **Remarque.** Les combinaisons linéaires d'un seul vecteur $\vec{u}$ sont :

Exemple 6 — **1.** Dans $\mathbb{R}^2$, montrer que $\vec{u} = (3\,,\,2)$ est combinaison linéaire de $\vec{e}_1 = (1\,,\,0)$ et $\vec{e}_2 = (1\,,\,1)$.
2. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que la fonction $f : t \mapsto \cos(t - \frac{\pi}{3})$ est combinaison linéaire de $g = \cos$ et $h = \sin$.
3. Dans $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, montrer que toute $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de $(E_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$.
4. Dans $E = \mathbb{K}[X]$, montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ est combinaison linéaire :
a) des polynômes $1, X, \ldots, X^n$. **b)** des polynômes $1, (X-1), \ldots, (X-1)^n$.

Exercice 4 — Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $\vec{w} = (-5, -4, -1)$ est-il combinaison linéaire de $\vec{u} = (1, 2, 1)$ et $\vec{v} = (1, -1, -1)$?

Exercice 5 — Dans $\mathbb{R}[X]$, $P = X^2 + 3X + 1$ est-il combinaison linéaire de $A = 1 + X$, $B = 1 + 2X + X^2$ et $C = X + X^2$?