1 Algèbre

Définition 1

Une $\mathbb{K}$-algèbre est un ensemble A muni de deux lois de composition interne $+$ et $\times$ et d'une multiplication externe $\cdot$ telles que

i) $(A,+,\times)$ est un anneau

ii) $(A,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

iii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tous $\vec{x},\vec{y} \in A$: $(\lambda\cdot\vec{x})\times\vec{y} = \vec{x}\times(\lambda\cdot\vec{y}) = \lambda\cdot(\vec{x}\times\vec{y})$.

Exemple 1 — Soit $X \subset \mathbb{R}$, non vide. L'ensemble $\mathscr{F}(X,\mathbb{R})$ des applications de X dans $\mathbb{R}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Exemple 2 — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Exemple 3 — L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

• **Remarque.** Notons $\vec{1}_A$ l'élément neutre de A pour $\times$.
La propriété *iii)* assure en particulier que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $\vec{x} \in A$: $\lambda\cdot\vec{x} = (\lambda\vec{1}_A)\times\vec{x} = \vec{x}\times(\lambda\vec{1}_A)$
Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, cela signifie que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et toute $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: $\lambda M = (\lambda I_n)\times M = M\times(\lambda I_n)$.
Dit autrement, on retrouve la propriété selon laquelle, dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il revient au même de multiplier (au sens espace vectoriel) M par le scalaire λ ou de multiplier M (au sens anneau) par la matrice scalaire λI_n

2 Sous-algèbre

Définition 2

Soit $(A,+,\times,\cdot)$ une $\mathbb{K}$-algèbre. Une *sous-algèbre* de A est une partie B de A telle que :

- B est un sous-anneau de $(A,+,\times)$
- B est un sous-espace vectoriel de $(A,+,\cdot)$

SF 10 : pour montrer que B est une sous-algèbre de A

On vérifie que :

i) B possède l'élément neutre pour $\times$: $\vec{1}_A \in B$

ii) B est stable par combinaisons linéaires : $\forall \vec{x},\vec{y} \in B,\ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{K},\quad \lambda\vec{x}+\mu\vec{y} \in B$.

iii) B est stable par multiplication : $\forall \vec{x},\vec{y} \in B,\quad \vec{x}\times\vec{y} \in B$

■ Exemples dans l'algèbre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles

Sous-algèbre	Seulement sous-espace vecoriel
Ensemble des suites convergentes	Ensemble des suites de limite nulle
Ensemble des suites suites bornées	Suites u telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

■ Exemples dans l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées

Sous-algèbre	Seulement sous-espace vecoriel
Ensemble des matrices diagonales	Ensemble des matrices symétriques
Ensemble des matrices triangulaires supérieures	Ensemble des matrices antisymétriques
Ensemble $\mathbb{K}[M] = \{P(M)\ ;\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ des polynômes en une matrice M donnée	Ensemble des matrices strictement triangulaires supérieures (ou inférieures)

Exercice 1 — Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On pose : $\mathscr{C}(M) = \{N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})\ ;\ MN = NM\}$.
Montrer que $\mathscr{C}(M)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.