1 Familles libres

• **Cadre.** • E est un $\mathbb{K}$-e.v. • $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ est une famille finie de vecteurs de E

Définition 1

• La famille $\mathscr{F}$ est libre si la seule combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ donnant le vecteur nul est celle où tous où tous les coefficients sont nuls.

Autrement dit $\mathscr{F}$ est libre si pour tout $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^n$:

• $\mathscr{F}$ est liée si elle n'est pas libre *i.e.* si :

• **Vocabulaire.** On dit aussi que les $\vec{u}_i$ sont linéairement indépendants (au lieu de « $\mathscr{F}$ est une famille libre »).

Exemple 1 — Dans $\mathbb{R}^3$ on note $\vec{u}_1 = (1,0,0)$, $\vec{u}_2 = (0,1,0)$, $\vec{v} = (1,1,0)$ et $\vec{w} = (0,1,1)$.
Montrer que : **a)** $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v})$ est liée. **b)** $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w})$ est libre.

Exemple 2 — Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ où $\vec{u}_1 = (1,0,2)$, $\vec{u}_2 = (1,1,3)$, $\vec{u}_3 = (2,-3,1)$ est-elle libre ?

Exemple 3 — Dans $\mathbb{R}_2[X]$, la famille (P,Q,R) où $P = -1+3X+2X^2$, $Q = X+X^2$ et $R = -X-2X^2$ est-elle libre ?

Exemple 4 — Montrer que $f_1 : x \mapsto \cos x$, $f_2 : x \mapsto \sin x$, $f_3 : x \mapsto x\cos x$ et $f_4 : x \mapsto x\sin x$ forment une famille libre.

Théorème 1

Une famille est liée ssi :

Exemple 5 — Montrer que $f_1 : x \mapsto \cos x$, $f_2 : x \mapsto \sin x$ et $f_3 : x \mapsto \cos(x - \frac{\pi}{3})$ forment une famille liée de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

• **Remarques:**
• Une famille de deux vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée ssi :
• Une famille d'un seul vecteur $(\vec{u})$ est libre ssi :
• La famille vide est :

Théorème 2

• Si $\mathscr{F}$ est libre :

• Si $\mathscr{F}$ est libre et si :

Exercice 1 ♥ — Démontrer le second point (le premier est simple).

Théorème 3

• Une famille $(P_0, \dots, P_n)$ de polynômes est dite *de degrés étagés* si :

•

Exercice 2 ♥ — Démontrer la propriété de liberté par récurrence sur n.

2 Bases

Théorème 4

Une famille est une base de E ssi elle est à la fois :

Exercice 3 ♥ — Démontrer le théorème.

SF 3 : Trouver une base d'un s.e.v. F

Exemple 6 — Donner une base de : **a)** $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-2y-z=0 \text{ et } x-y+t=0\}$ **b)** $\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(X+1) = XP'\}$

Exemple 7 — Soit $a \in \mathbb{K}$. Montrer que la famille $(1, (X-a), (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

• **Vocabulaire : bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}_n[X]$.**

• La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est la famille $(\vec{e}_i)_{1\leq i\leq n}$ où : $\vec{e}_1 = (1,0,\dots,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0,\dots,0)$, ..., $\vec{e}_n = (0,\dots,0,1)$
• La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$.
• La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$

3 Généralisations : familles libres quelconques / parties libres

Définition 2

Soit $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ une famille de vecteur de E. La famille $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ ou la partie $A = \{\vec{u}_i\}_{i\in I}$ est dite *libre* si *toutes ses sous-familles finies* sont libres. Elle est dite *liée* dans le cas contraire.

En pratique : pour vérifier la liberté d'une famille infinie $(\vec{u}_i)_{i\in\mathbb{N}}$

On se ramène au cas d'une famille finie : on montre que la famille $(\vec{u}_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 8 — La famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.

• **Remarque.** Comme pour les familles finies, la famille $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ (ou la partie est $\{\vec{u}_i\}_I$) est *libre* si pour toute famille $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ **presque nulle** : $\sum_{i\in I} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E \implies \forall i \in I, \quad \alpha_i = 0$

• **Remarque.** La caractérisation des bases fournie par le théorème 4 reste valable pour les familles quelconques.