III Somme de sous-espaces

Cadre

On suppose ici que :

- F et G sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
- $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_p)$ est une base de F et $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_q)$ une base de G (donc $p = \dim F$ et $q = \dim G$).

Théorème 1

Si F et G sont en somme directe alors 1. $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ est une base de $F \oplus G$. 2. $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.
La base $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ est appelée *base adaptée* à la somme directe.

Démonstration. Supposons F et G en somme directe : $F \cap G = \{0_E\}$.

1. - *$(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ est libre.* Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbb{K}$ tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i b_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j c_j = 0_E$.

   Remarquons que : $\underbrace{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i b_i}_{\in F} = \underbrace{-\displaystyle\sum_{j=1}^{q} \beta_j c_j}_{\in G}$ et les deux membres de cette égalité sont donc à la fois éléments de F et de G *i.e.* sont éléments de $F \cap G = \{0_E\}$. Les deux membres sont donc nuls :

     - D'une part $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i b_i = 0_E$ et la liberté de $\mathcal{B}$ impose $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$.
     - D'autre part $\displaystyle\sum_{j=1}^{q} \beta_j c_j = 0_E$ et la liberté de $\mathcal{C}$ impose $\beta_1 = \cdots = \beta_q = 0$.

   - *$(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ est génératrice de $F \oplus G$.* Soit $z \in F \oplus G$. Il existe $(x, y) \in F \times G$ tels que $z = x + y$.

     - Puisque $\mathcal{B}$ est génératrice de F, il existe $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{K}$ tels que : $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i b_i$.
     - Puisque $\mathcal{C}$ est génératrice de G, il existe $y_1, \ldots, y_q \in \mathbb{K}$ tels que : $y = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} y_j c_j$.

   Par conséquent $z = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i b_i + \sum_{j=1}^{q} y_j c_j$.

2. Sachant que $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ est une base de $F \oplus G$ et par définition de la dimension :

$$\dim(F \oplus G) = \mathrm{Card}\,(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \mathrm{Card}\,\mathcal{B} + \mathrm{Card}\,\mathcal{C} = \dim F + \dim G$$

Théorème 2

Si $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ est une famille libre, alors F et G sont en somme directe.

Démonstration. Supposons $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ libre et montrons que : $F \cap G = \{0_E\}$.
Soit $z \in F \cap G$:

- $z \in F$ donc il existe $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{K}$ tels que : $z = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i b_i$.
- $z \in G$ donc il existe $y_1, \ldots, y_q \in \mathbb{K}$ tels que : $z = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} y_j c_j$.

Par différence : $\underbrace{x_1 b_1 + \cdots + x_p b_p - y_1 c_1 - \cdots - y_q c_q}_{\text{combinaison linéaire nulle de } (\mathcal{B}, \mathcal{C})} = 0$

La liberté de $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ impose : $x_1 = \cdots = x_p = -y_1 = \cdots = -y_q = 0$ et donc $z = 0_E$.