• **Cadre.** • $\mathscr{B} = (b_i)_{i\in I}$ est une base de E • Pour $x \in E$, on notera $(x_i)_{i\in I}$ ses coordonnées dans $\mathscr{B}$: $x = \sum_{i\in I} x_i b_i$

1 Utiliser une base de E pour déterminer $\operatorname{Im} f$

Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. L'image de f est engendrée par la famille $\left(f(b_i)\right)_{i\in I}$:

Exercice 1 — Démontrer l'égalité. • **Remarque.** Il suffit que $(b_i)_{i\in I}$ soit génératrice de E

SF 4 : Déterminer $\operatorname{Im} f$ (option n° 1)

Exemple 1 — Déterminer l'image de l'application linéaire $f : (x,y) \mapsto (x+2y\,,\,2x+y\,,\,-x+y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$

Exemple 2 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'image de l'endomorphisme $D : P \mapsto P'$ de $\mathbb{K}_n[X]$.

2 Utiliser une base de E pour prouver l'injectivité/la surjectivité/ la bijectivité

Théorème 2

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. *i)* f est injective si et seulement si :

ii) f est surjective si et seulement si :

iii) f est bijective si et seulement si :

Exercice 2 — Démontrer le théorème.

SF 6 : Montrer que f est un isomorphisme de E sur F (option n° 2)

Il suffit de montrer que f transforme une base de E en une base de F

Exemple 3 — Montrer que l'application $f : P \mapsto P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

3 Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base

Définition 1

Soit $j \in I$. La j^e *forme coordonnée* de E (dans $\mathscr{B}$) est la forme linéaire :

Elle vérifie : • •

Théorème 3 : « Interpolation linéaire »

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F.
Il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que :

• **Conséquence.** Pour définir $f \in \mathscr{L}(E,F)$ il suffit de définir les valeurs de f sur les vecteurs d'une base de E.

Exercice 3 — Démontrer l'existence et l'unicité d'une telle application linéaire par analyse-synthèse.

Exemple 4 — On définit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ par $f(1,0) = (1,0,1)$ et $f(0,1) = (1,1,2)$.
a) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'expression de $f(x,y)$. **b)** Y-a-t-il un lien entre f et la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$?

Théorème 4 : Détermination d'une application linéaire sur une somme directe

On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$. Soient $f_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$ et $f_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$.
Il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que : • •

4 Espaces de dimension finie isomorphes

Théorème 5

On suppose E de dimension finie.
F est isomorphe à E ssi F est de dimension finie et :

Exercice 4 — Démontrer l'équivalence du théorème.

Exemple 5 — Soit $a,b \in \mathbb{C}$. Prouver que $F = \left\{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n\right\}$ est un plan vectoriel.