Complément sur les ensembles

Chapitre 9.0

(complément préparatoire au chapitre 9 qui viendra plus tard)

I Ensembles

I Ensembles

II Relations binaires sur un ensemble E

1 Vocabulaire lié aux ensembles

Définition 1

Un ensemble E est inclus dans un ensemble F,noté $E \subset F$, si tout élément de E appartient à F *ie* :

1 Vocabulaire lié aux ensembles

Définition 1

Un ensemble E est inclus dans un ensemble F,noté $E \subset F$, si tout élément de E appartient à F *ie* : $\quad \forall x \in E, \quad x \in F$

1 Vocabulaire lié aux ensembles

Définition 1

Un ensemble E est inclus dans un ensemble F,noté $E \subset F$, si tout élément de E appartient à F *ie* : $\quad \forall x \in E, \quad x \in F$

Pour montre que $E \subset F$

1 Vocabulaire lié aux ensembles

Définition 1

Un ensemble E est inclus dans un ensemble F,noté $E \subset F$, si tout élément de E appartient à F *ie* : $\quad \forall x \in E, \quad x \in F$

Pour montre que $E \subset F$

« Soit $x \in E$ »

1 Vocabulaire lié aux ensembles

Définition 1

Un ensemble E est inclus dans un ensemble F,noté $E \subset F$, si tout élément de E appartient à F *ie* : $\quad \forall x \in E, \quad x \in F$

Pour montre que $E \subset F$

« Soit $x \in E$ »

$$\ldots$$

« donc $x \in F$. »

Définition 1

Un ensemble E est inclus dans un ensemble F,noté $E \subset F$, si tout élément de E appartient à F *ie* : $\quad \forall x \in E, \quad x \in F$

Pour montre que $E \subset F$

« Soit $x \in E$ »

$$\dots$$

« donc $x \in F$. »

Exemple 1

Montrer que : $\quad \mathbb{U}_8 \subset \mathbb{U}_{16}$.

Définition 2

Soient A, E deux ensembles. Lorsque $A \subset E$, on dit que :

Définition 2

Soient A, E deux ensembles. Lorsque $A \subset E$, on dit que : A est un sous-ensemble de E ou une partie de E.

Définition 2

Soient A, E deux ensembles. Lorsque $A \subset E$, on dit que : A est un sous-ensemble de E ou une partie de E.

- L'ensemble des parties de E est noté : $\mathscr{P}(E)$.

1 Vocabulaire lié aux ensembles

Définition 2

Soient A, E deux ensembles. Lorsque $A \subset E$, on dit que : A est un sous-ensemble de E ou une partie de E.

- L'ensemble des parties de E est noté : $\mathscr{P}(E)$.
- $A \in \mathscr{P}(E)$ signifie :

Définition 2

Soient A, E deux ensembles. Lorsque $A \subset E$, on dit que : A est un sous-ensemble de E ou une partie de E.

- L'ensemble des parties de E est noté : $\mathscr{P}(E)$.
- $A \in \mathscr{P}(E)$ signifie : $A \subset E$.

Définition 2

Soient A, E deux ensembles. Lorsque $A \subset E$, on dit que : A est un sous-ensemble de E ou une partie de E.

- L'ensemble des parties de E est noté : $\mathscr{P}(E)$.
- $A \in \mathscr{P}(E)$ signifie : $A \subset E$.

Remarque

$\mathscr{P}(E)$ possède toujours :

Définition 2

Soient A, E deux ensembles. Lorsque $A \subset E$, on dit que : A est un sous-ensemble de E ou une partie de E.

- L'ensemble des parties de E est noté : $\mathscr{P}(E)$.
- $A \in \mathscr{P}(E)$ signifie : $A \subset E$.

Remarque

$\mathscr{P}(E)$ possède toujours : E et $\varnothing$

Définition 2

Soient A, E deux ensembles. Lorsque $A \subset E$, on dit que : A est un sous-ensemble de E ou une partie de E.

- L'ensemble des parties de E est noté : $\mathscr{P}(E)$.
- $A \in \mathscr{P}(E)$ signifie : $A \subset E$.

Remarque

$\mathscr{P}(E)$ possède toujours : E et $\varnothing$

Exemple 2

Lister tous les éléments de $\mathscr{P}(E)$ lorsque : $E = \{1, 2, 3\}$.

Définition 3

- Le produit cartésien de deux ensembles E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des :

1 Vocabulaire lié aux ensembles

Définition 3

- Le produit cartésien de deux ensembles E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des : *couples* (x, y) pour certains $x \in E$ et $y \in F$

Définition 3

- Le produit cartésien de deux ensembles E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des : *couples* (x, y) pour certains $x \in E$ et $y \in F$
- Plus généralement $E_1 \times E_2 \times \dots E_n$ est l'ensemble des *n-uplets* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pour certains $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, $\dots$, $x_n \in E_n$.

Définition 3

- Le produit cartésien de deux ensembles E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des : *couples* (x, y) pour certains $x \in E$ et $y \in F$
- Plus généralement $E_1 \times E_2 \times \ldots E_n$ est l'ensemble des *n-uplets* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour certains $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, $\ldots$, $x_n \in E_n$.

Notation

$E^n = E \times E \times \cdots \times E$.

1 Vocabulaire lié aux ensembles

Définition 3

- Le produit cartésien de deux ensembles E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des : *couples* (x, y) pour certains $x \in E$ et $y \in F$
- Plus généralement $E_1 \times E_2 \times \dots E_n$ est l'ensemble des *n-uplets* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pour certains $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, $\dots$, $x_n \in E_n$.

Notation

$E^n = E \times E \times \cdots \times E$.

Exemple 3

Décrire $E \times F$ lorsque : $\quad E = \{a, b\} \quad$ et $\quad F = \{1, 2, 3\}$.

Définition 3

- Le produit cartésien de deux ensembles E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des : *couples* (x, y) pour certains $x \in E$ et $y \in F$
- Plus généralement $E_1 \times E_2 \times \dots E_n$ est l'ensemble des *n-uplets* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pour certains $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, ..., $x_n \in E_n$.

Notation

$E^n = E \times E \times \cdots \times E$.

Exemple 3

Décrire $E \times F$ lorsque : $\quad E = \{a, b\} \quad$ et $\quad F = \{1, 2, 3\}$.

☢ **Attention** ☢ Ne pas confondre $\{x_1, \dots, x_n\}$ et $(x_1, \dots, x_n)$.
Par exemple :

Définition 3

- Le produit cartésien de deux ensembles E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des : *couples* (x, y) pour certains $x \in E$ et $y \in F$
- Plus généralement $E_1 \times E_2 \times \dots E_n$ est l'ensemble des *n-uplets* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pour certains $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, $\dots$, $x_n \in E_n$.

Notation

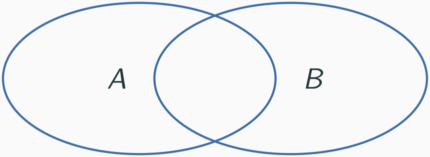
$E^n = E \times E \times \cdots \times E$.

Exemple 3

Décrire $E \times F$ lorsque : $\quad E = \{a, b\} \quad$ et $\quad F = \{1, 2, 3\}$.

☢ **Attention** ☢ Ne pas confondre $\{x_1, \dots, x_n\}$ et $(x_1, \dots, x_n)$.
Par exemple : $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$ mais $(1, 2, 3) \neq (2, 3, 1)$

2 Opérations ensemblistes

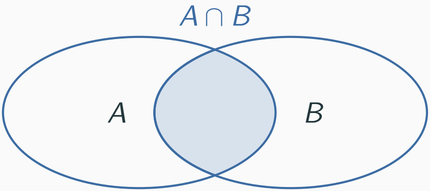


Définition 4

$x \in A \cap B \Leftrightarrow$

A et B sont disjoints lorsque

2 Opérations ensemblistes

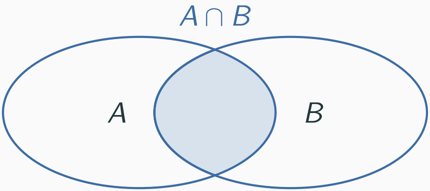


Définition 4

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{et} \quad x \in B$$

A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \varnothing$

2 Opérations ensemblistes



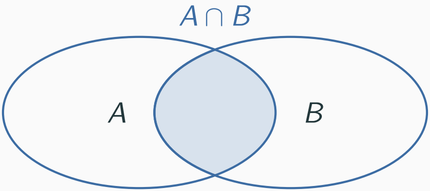
Définition 4

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{et} \quad x \in B$$

A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \varnothing$

Théorème 1 : Propriétés de l'intersection

- $A \cap A =$
- $A \cap \varnothing =$
- $A \cap E =$



Définition 4

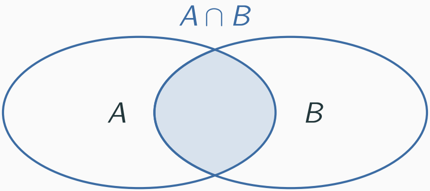
$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{et} \quad x \in B$$

A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \varnothing$

Théorème 1 : Propriétés de l'intersection

- $A \cap A = A$
- $A \cap \varnothing =$
- $A \cap E =$

2 Opérations ensemblistes



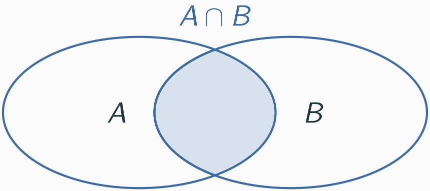
Définition 4

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{et} \quad x \in B$$

A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \varnothing$

Théorème 1 : Propriétés de l'intersection

- $A \cap A = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap E =$



Définition 4

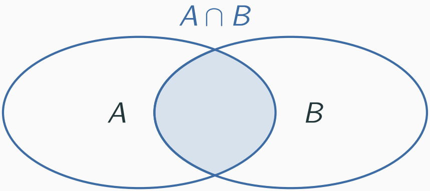
$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{et} \quad x \in B$$

A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \varnothing$

Théorème 1 : Propriétés de l'intersection

- $A \cap A = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap E = A$

2 Opérations ensemblistes



Définition 4

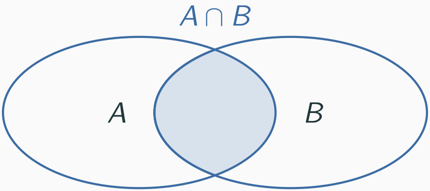
$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{et} \quad x \in B$$

A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \varnothing$

Théorème 1 : Propriétés de l'intersection

- $A \cap A = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap E = A$
- *Ordre à connaître :*
- $A \cap B \subset$
- $A \cap B \subset$

2 Opérations ensemblistes



Définition 4

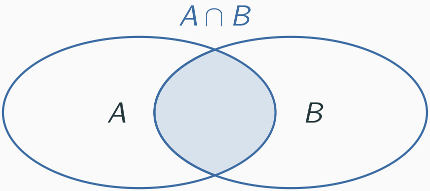
$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{et} \quad x \in B$$

A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \varnothing$

Théorème 1 : Propriétés de l'intersection

- $A \cap A = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap E = A$
- *Ordre à connaître :*
- $A \cap B \subset A$
- $A \cap B \subset B$

2 Opérations ensemblistes



Définition 4

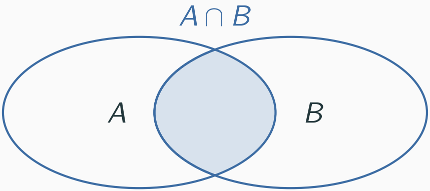
$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{et} \quad x \in B$$

A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \varnothing$

Théorème 1 : Propriétés de l'intersection

- $A \cap A = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap E = A$
- *Ordre à connaître :*
  - $A \cap B \subset A$
  - $A \cap B \subset B$
- *Commutativité :* $A \cap B =$

2 Opérations ensemblistes



Définition 4

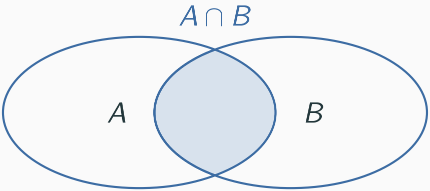
$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{et} \quad x \in B$$

A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \varnothing$

Théorème 1 : Propriétés de l'intersection

- $A \cap A = A$ ▪ $A \cap \varnothing = \varnothing$ ▪ $A \cap E = A$
- *Ordre à connaître :* ▪ $A \cap B \subset A$ ▪ $A \cap B \subset B$
- *Commutativité :* $A \cap B = B \cap A$

2 Opérations ensemblistes



Définition 4

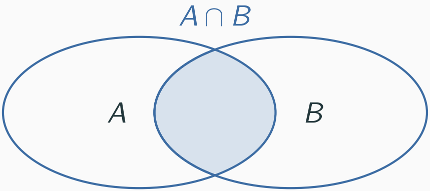
$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{et} \quad x \in B$$

A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \varnothing$

Théorème 1 : Propriétés de l'intersection

- $A \cap A = A$ • $A \cap \varnothing = \varnothing$ • $A \cap E = A$
- *Ordre à connaître :* • $A \cap B \subset A$ • $A \cap B \subset B$
- *Commutativité :* $A \cap B = B \cap A$
- *Associativité :* $(A \cap B) \cap C =$

2 Opérations ensemblistes



Définition 4

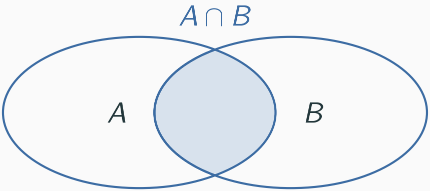
$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{et} \quad x \in B$$

A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \varnothing$

Théorème 1 : Propriétés de l'intersection

- $A \cap A = A$ ▪ $A \cap \varnothing = \varnothing$ ▪ $A \cap E = A$
- *Ordre à connaître :* ▪ $A \cap B \subset A$ ▪ $A \cap B \subset B$
- *Commutativité :* $A \cap B = B \cap A$
- *Associativité :* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

2 Opérations ensemblistes



Définition 4

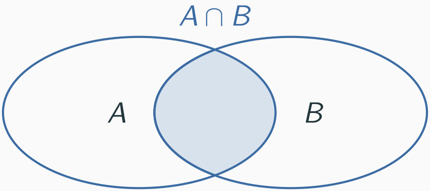
$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{et} \quad x \in B$$

A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \varnothing$

Théorème 1 : Propriétés de l'intersection

- $A \cap A = A$ ▪ $A \cap \varnothing = \varnothing$ ▪ $A \cap E = A$
- *Ordre à connaître :* ▪ $A \cap B \subset A$ ▪ $A \cap B \subset B$
- *Commutativité :* $A \cap B = B \cap A$
- *Associativité :* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Si $A \subset B$, alors : $A \cap B =$

2 Opérations ensemblistes



Définition 4

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{et} \quad x \in B$$

A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \varnothing$

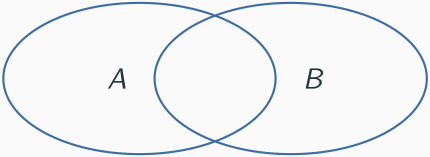
Théorème 1 : Propriétés de l'intersection

- $A \cap A = A$ ▪ $A \cap \varnothing = \varnothing$ ▪ $A \cap E = A$
- *Ordre à connaître :* ▪ $A \cap B \subset A$ ▪ $A \cap B \subset B$
- *Commutativité :* $A \cap B = B \cap A$
- *Associativité :* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Si $A \subset B$, alors : $A \cap B = A$

2 Opérations ensemblistes

Définition 5

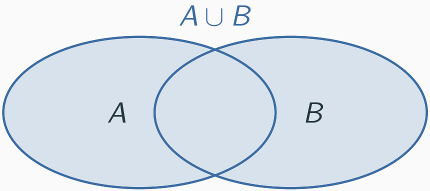
$x \in A \cup B \Leftrightarrow$



2 Opérations ensemblistes

Définition 5

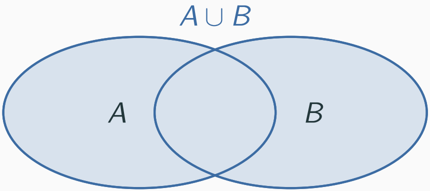
$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B$$



2 Opérations ensemblistes

Définition 5

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B$$



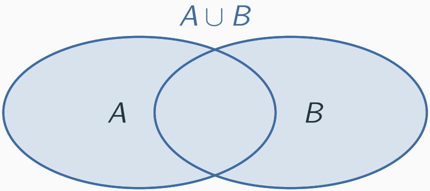
Théorème 2 : Propriétés de la réunion

- $A \cup A =$
- $A \cup \varnothing =$
- $A \cup E =$

2 Opérations ensemblistes

Définition 5

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B$$



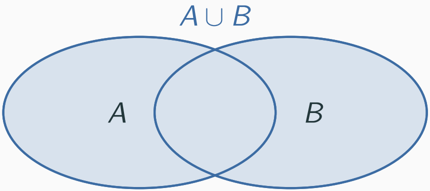
Théorème 2 : Propriétés de la réunion

- $A \cup A = A$
- $A \cup \varnothing =$
- $A \cup E =$

2 Opérations ensemblistes

Définition 5

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$



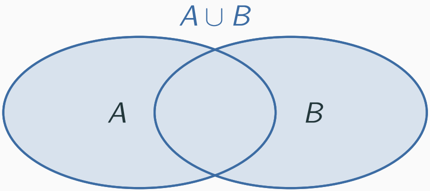
Théorème 2 : Propriétés de la réunion

- $A \cup A = A$
- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cup E =$

2 Opérations ensemblistes

Définition 5

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B$$



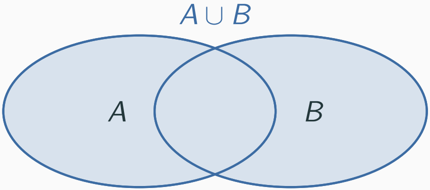
Théorème 2 : Propriétés de la réunion

- $A \cup A = A$
- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cup E = E$

2 Opérations ensemblistes

Définition 5

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$



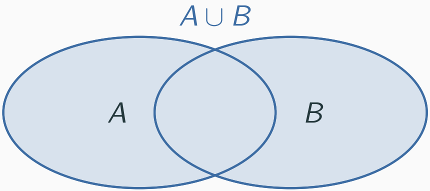
Théorème 2 : Propriétés de la réunion

- $A \cup A = A$ ▪ $A \cup \varnothing = A$ ▪ $A \cup E = E$
- *Ordre à connaître :* ▪ $\subset A \cup B$ ▪ $\subset A \cup B$

2 Opérations ensemblistes

Définition 5

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B$$

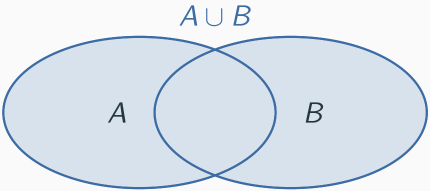


Théorème 2 : Propriétés de la réunion

- $A \cup A = A$
- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cup E = E$
- *Ordre à connaître :*
  - $A \subset A \cup B$
  - $B \subset A \cup B$

Définition 5

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$



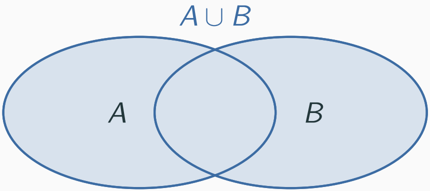
Théorème 2 : Propriétés de la réunion

- $A \cup A = A$
- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cup E = E$
- *Ordre à connaître :*
  - $A \subset A \cup B$
  - $B \subset A \cup B$
- *Commutativité :* $A \cup B =$

2 Opérations ensemblistes

Définition 5

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B$$



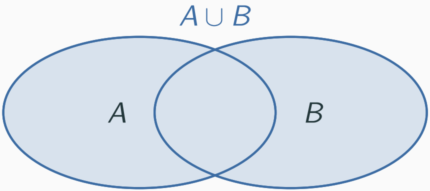
Théorème 2 : Propriétés de la réunion

- $A \cup A = A$ - $A \cup \varnothing = A$ - $A \cup E = E$
- *Ordre à connaître :*   - $A \subset A \cup B$ - $B \subset A \cup B$
- *Commutativité :* $A \cup B = B \cup A$

2 Opérations ensemblistes

Définition 5

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$



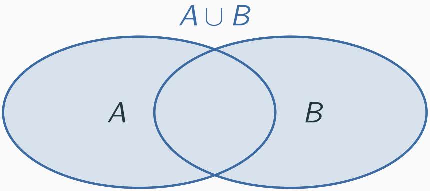
Théorème 2 : Propriétés de la réunion

- $A \cup A = A$
- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cup E = E$
- *Ordre à connaître :*
  - $A \subset A \cup B$
  - $B \subset A \cup B$
- *Commutativité :* $A \cup B = B \cup A$
- *Associativité :* $(A \cup B) \cup C =$

2 Opérations ensemblistes

Définition 5

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$



Théorème 2 : Propriétés de la réunion

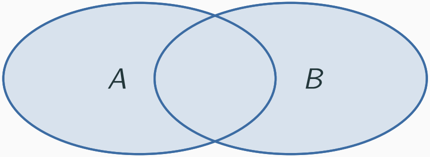
- $A \cup A = A$ - $A \cup \varnothing = A$ - $A \cup E = E$
- *Ordre à connaître :* - $A \subset A \cup B$ - $B \subset A \cup B$
- *Commutativité :* $A \cup B = B \cup A$
- *Associativité :* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2 Opérations ensemblistes

Définition 5

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B$

$A \cup B$

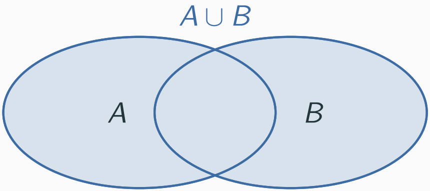


Théorème 2 : Propriétés de la réunion

- $A \cup A = A$ ▪ $A \cup \varnothing = A$ ▪ $A \cup E = E$
- *Ordre à connaître :* ▪ $A \subset A \cup B$ ▪ $B \subset A \cup B$
- *Commutativité :* $A \cup B = B \cup A$
- *Associativité :* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- Si $A \subset B$, alors : $A \cup B =$

Définition 5

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B$$



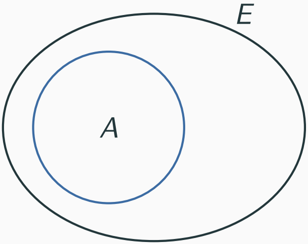
Théorème 2 : Propriétés de la réunion

- $A \cup A = A$ — $A \cup \varnothing = A$ — $A \cup E = E$
- *Ordre à connaître :* — $A \subset A \cup B$ — $B \subset A \cup B$
- *Commutativité :* $A \cup B = B \cup A$
- *Associativité :* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- Si $A \subset B$, alors : $A \cup B = B$

2 Opérations ensemblistes

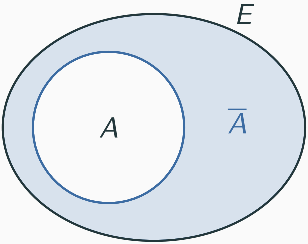
Définition 6

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow$$



Définition 6

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

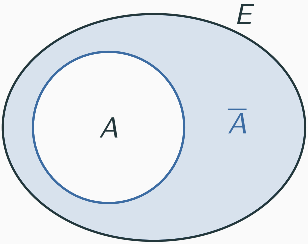


2 Opérations ensemblistes

Définition 6

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

- $\overline{\overline{A}} =$
- $\overline{\varnothing} =$
- $\overline{E} =$
- $A \cap \overline{A} =$
- $A \cup \overline{A} =$

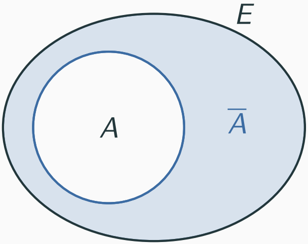


2 Opérations ensemblistes

Définition 6

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{\varnothing} =$
- $\overline{E} =$
- $A \cap \overline{A} =$
- $A \cup \overline{A} =$

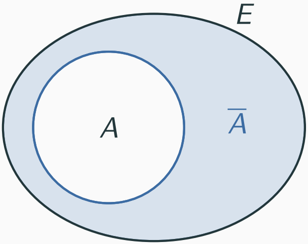


2 Opérations ensemblistes

Définition 6

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{\varnothing} = E$
- $\overline{E} =$
- $A \cap \overline{A} =$
- $A \cup \overline{A} =$

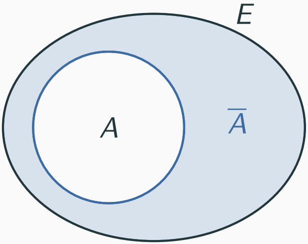


2 Opérations ensemblistes

Définition 6

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

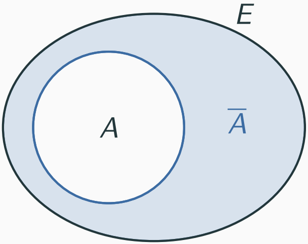
- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{\varnothing} = E$
- $\overline{E} = \varnothing$
- $A \cap \overline{A} =$
- $A \cup \overline{A} =$



Définition 6

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{\varnothing} = E$
- $\overline{E} = \varnothing$
- $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- $A \cup \overline{A} =$

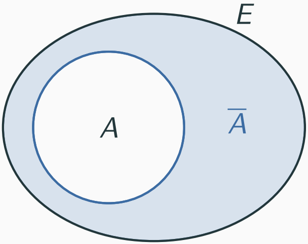


2 Opérations ensemblistes

Définition 6

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{\varnothing} = E$
- $\overline{E} = \varnothing$
- $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- $A \cup \overline{A} = E$



Théorème 3 : Règles de calculs

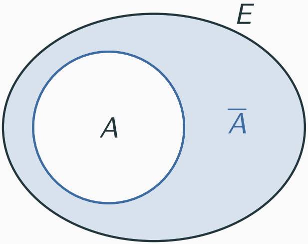
- $(A \cup B) \cap C =$
- $(A \cap B) \cup C =$
- $\overline{A \cap B} =$
- $\overline{A \cup B} =$

2 Opérations ensemblistes

Définition 6

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{\varnothing} = E$
- $\overline{E} = \varnothing$
- $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- $A \cup \overline{A} = E$



Théorème 3 : Règles de calculs

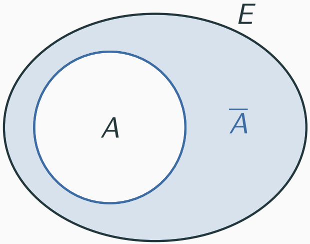
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C =$
- $\overline{A \cap B} =$
- $\overline{A \cup B} =$

2 Opérations ensemblistes

Définition 6

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{\varnothing} = E$
- $\overline{E} = \varnothing$
- $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- $A \cup \overline{A} = E$



Théorème 3 : Règles de calculs

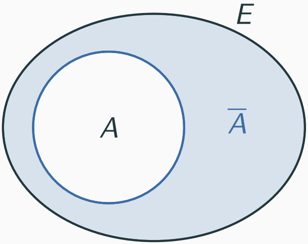
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $\overline{A \cap B} =$
- $\overline{A \cup B} =$

2 Opérations ensemblistes

Définition 6

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{\varnothing} = E$
- $\overline{E} = \varnothing$
- $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- $A \cup \overline{A} = E$



Théorème 3 : Règles de calculs

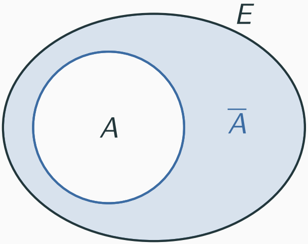
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} =$

2 Opérations ensemblistes

Définition 6

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{\varnothing} = E$
- $\overline{E} = \varnothing$
- $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- $A \cup \overline{A} = E$



Théorème 3 : Règles de calculs

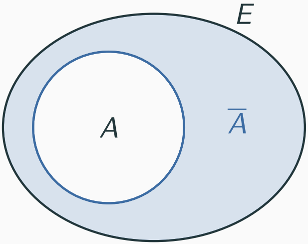
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

2 Opérations ensemblistes

Définition 6

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{\varnothing} = E$
- $\overline{E} = \varnothing$
- $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- $A \cup \overline{A} = E$



Théorème 3 : Règles de calculs

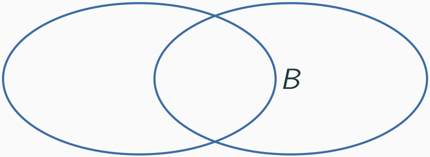
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Exercice 1

Démontrer que : $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Définition 7

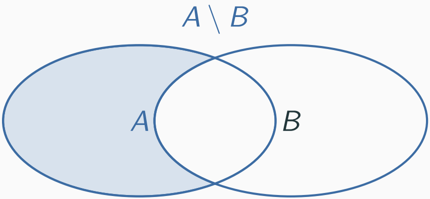
$x \in A \setminus B \Leftrightarrow$



2 Opérations ensemblistes

Définition 7

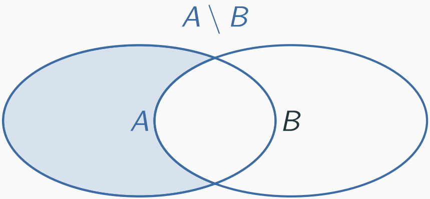
$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin B$$



2 Opérations ensemblistes

Définition 7

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin B$$



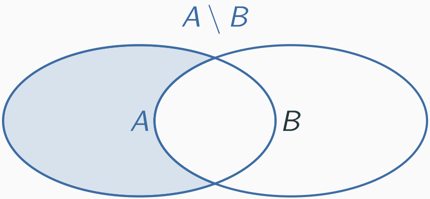
Généralisation : Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de E :

- $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i =$
- $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i =$

2 Opérations ensemblistes

Définition 7

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin B$$

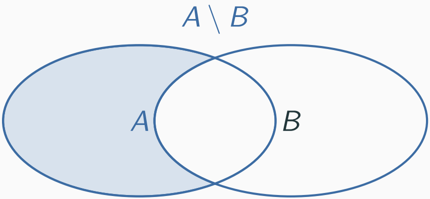


Généralisation : Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de E :

- $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, \quad x \in A_i\}$
- $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i =$

Définition 7

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin B$$



Généralisation : Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de E :

- $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, \quad x \in A_i\}$
- $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, \quad x \in A_i\}$

II Relations binaires sur un ensemble E

I Ensembles

II Relations binaires sur un ensemble E

Relation binaire

Définition 1

Une *relation binaire* $\mathscr{R}$ sur E est une partie de $E \times E$.

Relation binaire

Propriété qui s'applique aux couple d'éléments de E

Définition 1

Une *relation binaire* $\mathscr{R}$ sur E est une partie de $E \times E$.

Interprétation

On écrit $x \mathscr{R} y$ plutôt que $(x, y) \in \mathscr{R}$.

« x est en relation avec y »

1 Relations d'ordre

Définition 2

On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre si $\mathscr{R}$ est :

- *Réflexive* :
- *Antisymétrique* :
- *Transitive* :

1 Relations d'ordre

Définition 2

On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre si $\mathscr{R}$ est :

- *Réflexive* : $\forall x \in E, \quad x \mathscr{R} x.$
- *Antisymétrique* :
- *Transitive* :

Définition 2

On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre si $\mathscr{R}$ est :

- *Réflexive* : $\forall x \in E, \quad x\mathscr{R}x.$
- *Antisymétrique* : $\forall x, y \in E, \qquad (x\mathscr{R}y \quad \text{et} \quad y\mathscr{R}x) \implies x = y$
- *Transitive* :

1 Relations d'ordre

Définition 2

On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre si $\mathscr{R}$ est :

- *Réflexive* : $\forall x \in E, \quad x\mathscr{R}x.$
- *Antisymétrique* : $\forall x, y \in E, \qquad (x\mathscr{R}y \quad \text{et} \quad y\mathscr{R}x) \implies x = y$
- *Transitive* : $\forall x, y, z \in E, \qquad (x\mathscr{R}y \quad \text{et} \quad y\mathscr{R}z) \implies x\mathscr{R}z$

1 Relations d'ordre

Définition 2

On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre si $\mathscr{R}$ est :

- *Réflexive* : $\forall x \in E, \quad x\mathscr{R}x.$
- *Antisymétrique* : $\forall x, y \in E, \qquad (x\mathscr{R}y \quad \text{et} \quad y\mathscr{R}x) \implies x = y$
- *Transitive* : $\forall x, y, z \in E, \qquad (x\mathscr{R}y \quad \text{et} \quad y\mathscr{R}z) \implies x\mathscr{R}z$

Exemple 1 : Exemples de relations d'ordre

a) Sur $\mathbb{R}$:

b) Sur $\mathscr{P}(E)$:

Définition 2

On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre si $\mathscr{R}$ est :

- *Réflexive* : $\forall x \in E, \quad x \mathscr{R} x.$
- *Antisymétrique* : $\forall x, y \in E, \qquad (x \mathscr{R} y \quad \text{et} \quad y \mathscr{R} x) \implies x = y$
- *Transitive* : $\forall x, y, z \in E, \qquad (x \mathscr{R} y \quad \text{et} \quad y \mathscr{R} z) \implies x \mathscr{R} z$

Exemple 1 : Exemples de relations d'ordre

a) Sur $\mathbb{R}$: la relation « $\leq$ » b) Sur $\mathscr{P}(E)$:

Définition 2

On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre si $\mathscr{R}$ est :

- *Réflexive* : $\forall x \in E, \quad x \mathscr{R} x.$
- *Antisymétrique* : $\forall x, y \in E, \qquad (x \mathscr{R} y \quad \text{et} \quad y \mathscr{R} x) \implies x = y$
- *Transitive* : $\forall x, y, z \in E, \qquad (x \mathscr{R} y \quad \text{et} \quad y \mathscr{R} z) \implies x \mathscr{R} z$

Exemple 1 : Exemples de relations d'ordre

a) Sur $\mathbb{R}$: la relation « $\leq$ » b) Sur $\mathscr{P}(E)$: l'inclusion « $\subset$ »

Définition 2

On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre si $\mathscr{R}$ est :

- *Réflexive* : $\forall x \in E, \quad x \mathscr{R} x.$
- *Antisymétrique* : $\forall x, y \in E, \qquad (x \mathscr{R} y \quad \text{et} \quad y \mathscr{R} x) \implies x = y$
- *Transitive* : $\forall x, y, z \in E, \qquad (x \mathscr{R} y \quad \text{et} \quad y \mathscr{R} z) \implies x \mathscr{R} z$

Exemple 1 : Exemples de relations d'ordre

a) Sur $\mathbb{R}$: la relation « $\leq$ » b) Sur $\mathscr{P}(E)$: l'inclusion « $\subset$ »

Exercice 1

$b \mid a \iff \exists k \in \mathbb{N} \mid a = kb$

a) Montrer que la divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$

b) Montrer que la divisibilité n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$

Définition 3

Une relation d'ordre $\lhd$ sur E est dite :

- *Totale* si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables *i.e.* :

Définition 3

Une relation d'ordre $\lhd$ sur E est dite :

- *Totale* si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables *i.e.* : $\forall (x, y) \in E^2, \quad x \lhd y \quad \text{ou} \quad y \lhd x$

Définition 3

Une relation d'ordre $\lhd$ sur E est dite :

- *Totale* si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables *i.e.* : $\quad \forall (x, y) \in E^2, \quad x \lhd y \quad \text{ou} \quad y \lhd x$
- *Partielle* si elle n'est pas totale *i.e.* si :

Définition 3

Une relation d'ordre $\lhd$ sur E est dite :

- *Totale* si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables *i.e.* : $\quad \forall (x, y) \in E^2, \quad x \lhd y \quad \text{ou} \quad y \lhd x$
- *Partielle* si elle n'est pas totale *i.e.* si :
$$\exists (x, y) \in E^2 \mid x \not\lhd y \quad \text{et} \quad y \not\lhd x$$

Définition 3

Une relation d'ordre $\lhd$ sur E est dite :

- *Totale* si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables *i.e.* : $\forall (x,y) \in E^2, \quad x \lhd y \quad \text{ou} \quad y \lhd x$
- *Partielle* si elle n'est pas totale *i.e.* si :
$$\exists (x,y) \in E^2 \mid x \not\lhd y \quad \text{et} \quad y \not\lhd x$$

Exemple 2

a) La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est totale.

Définition 3

Une relation d'ordre $\lhd$ sur E est dite :

- *Totale* si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables *i.e.* : $\forall (x,y) \in E^2, \quad x \lhd y \quad \text{ou} \quad y \lhd x$
- *Partielle* si elle n'est pas totale *i.e.* si :
$$\exists (x,y) \in E^2 \mid x \not\lhd y \quad \text{et} \quad y \not\lhd x$$

Exemple 2

a) La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est totale.

b) La relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$ est partielle.

Définition 3

Une relation d'ordre $\lhd$ sur E est dite :

- *Totale* si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables *i.e.* : $\forall (x,y) \in E^2, \quad x \lhd y \quad \text{ou} \quad y \lhd x$
- *Partielle* si elle n'est pas totale *i.e.* si :
$$\exists (x,y) \in E^2 \mid x \ntrianglelefteq y \quad \text{et} \quad y \ntrianglelefteq x$$

Exemple 2

a) La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est totale.

b) La relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$ est partielle.

c) La relation d'inclusion sur $\mathscr{P}(E)$ est partielle dès que E contient au moins deux éléments.

Définition 4

Soit $\lhd$ une relation d'ordre sur E et $A \in \mathscr{P}(E)$.

- On dit que A est *majorée* (pour $\lhd$) si :

Définition 4

Soit $\lhd$ une relation d'ordre sur E et $A \in \mathscr{P}(E)$.

- On dit que A est *majorée* (pour $\lhd$) si :

$$\exists M \in E \mid \forall x \in A, \quad x \lhd M$$

Définition 4

Soit $\triangleleft$ une relation d'ordre sur E et $A \in \mathscr{P}(E)$.

- On dit que A est *majorée* (pour $\triangleleft$) si :

$$\exists M \in E \mid \forall x \in A, \quad x \triangleleft M$$

- On appelle *plus grand élément* de A tout :

1 Relations d'ordre

Définition 4

Soit $\lhd$ une relation d'ordre sur E et $A \in \mathscr{P}(E)$.

- On dit que A est *majorée* (pour $\lhd$) si :

$$\exists M \in E \mid \forall x \in A, \quad x \lhd M$$

- On appelle *plus grand élément* de A tout : majorant de A qui appartient à A

Définition 4

Soit $\lhd$ une relation d'ordre sur E et $A \in \mathscr{P}(E)$.

- On dit que A est *majorée* (pour $\lhd$) si :

$$\exists M \in E \mid \forall x \in A, \quad x \lhd M$$

- On appelle *plus grand élément* de A tout : majorant de A qui appartient à A

Exemple 3 : Sur $\mathbb{N}$ pour la relation de divisibilité $\mid$

Déterminer si A est majorée et possède un plus grand élément

a) $A = \{6, 10, 15\}$

b) $A = \mathbb{N}$

1 Relations d'ordre

Définition 4

Soit $\lhd$ une relation d'ordre sur E et $A \in \mathscr{P}(E)$.

- On dit que A est *majorée* (pour $\lhd$) si :

$$\exists M \in E \mid \forall x \in A, \quad x \lhd M$$

- On appelle *plus grand élément* de A tout : majorant de A qui appartient à A

Exercice 2

Montrer que si A possède un plus grand élément pour une relation d'ordre $\lhd$, alors il est unique.

2 Relations d'équivalence

Définition 5

On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence si $\mathscr{R}$ est

- *Réflexive* : $\forall x \in E, \quad x \mathscr{R} x.$
- *Symétrique* :
- *Transitive* : $\forall x, y, z \in E, \qquad (x \mathscr{R} y \quad \text{et} \quad y \mathscr{R} z) \implies x \mathscr{R} z$

2 Relations d'équivalence

Définition 5

On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence si $\mathscr{R}$ est

- *Réflexive* : $\forall x \in E, \quad x \mathscr{R} x.$
- *Symétrique* : $\forall x, y \in E, \qquad x \mathscr{R} y \implies y \mathscr{R} x$
- *Transitive* : $\forall x, y, z \in E, \qquad (x \mathscr{R} y \quad \text{et} \quad y \mathscr{R} z) \implies x \mathscr{R} z$

2 Relations d'équivalence

Définition 5

On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence si $\mathscr{R}$ est

- *Réflexive* : $\forall x \in E, \quad x \mathscr{R} x.$
- *Symétrique* : $\forall x, y \in E, \qquad x \mathscr{R} y \implies y \mathscr{R} x$
- *Transitive* : $\forall x, y, z \in E, \qquad (x \mathscr{R} y \quad \text{et} \quad y \mathscr{R} z) \implies x \mathscr{R} z$

Exemple 4 : Exemples de relations d'équivalence

a) Sur E :

b) Sur l'ensemble des droites du plan :

2 Relations d'équivalence

Définition 5

On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence si $\mathscr{R}$ est

- *Réflexive* : $\forall x \in E, \quad x \mathscr{R} x.$
- *Symétrique* : $\forall x, y \in E, \qquad x \mathscr{R} y \implies y \mathscr{R} x$
- *Transitive* : $\forall x, y, z \in E, \qquad (x \mathscr{R} y \quad \text{et} \quad y \mathscr{R} z) \implies x \mathscr{R} z$

Exemple 4 : Exemples de relations d'équivalence

a) Sur E : l'égalité

b) Sur l'ensemble des droites du plan :

2 Relations d'équivalence

Définition 5

On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence si $\mathscr{R}$ est

- *Réflexive* : $\forall x \in E, \quad x \mathscr{R} x.$
- *Symétrique* : $\forall x, y \in E, \qquad x \mathscr{R} y \implies y \mathscr{R} x$
- *Transitive* : $\forall x, y, z \in E, \qquad (x \mathscr{R} y \quad \text{et} \quad y \mathscr{R} z) \implies x \mathscr{R} z$

Exemple 4 : Exemples de relations d'équivalence

a) Sur E : l'égalité

b) Sur l'ensemble des droites du plan : le parallélisme

2 Relations d'équivalence

Définition 5

On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence si $\mathscr{R}$ est

- *Réflexive* : $\forall x \in E, \quad x\mathscr{R}x.$
- *Symétrique* : $\forall x, y \in E, \qquad x\mathscr{R}y \implies y\mathscr{R}x$
- *Transitive* : $\forall x, y, z \in E, \qquad (x\mathscr{R}y \quad \text{et} \quad y\mathscr{R}z) \implies x\mathscr{R}z$

Exemple 4 : Exemples de relations d'équivalence

a) Sur E : l'égalité

b) Sur l'ensemble des droites du plan : le parallélisme

$$a \equiv b \ [n] \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid a = b + kn$$

Exercice 3

Montrer que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$

Théorème 1

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E.

- Pour $x \in E$, la classe d'équivalence de x est l'ensemble des éléments en relation avec x : $\quad \mathrm{cl}(x) \underset{\text{déf.}}{=}$

2 Relations d'équivalence

Théorème 1

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E.

- Pour $x \in E$, la classe d'équivalence de x est l'ensemble des éléments en relation avec x : $\quad \mathrm{cl}(x) \underset{\text{déf.}}{=} \{y \in E \mid x\mathscr{R}y\}$

2 Relations d'équivalence

- Aucune n'est vide
- Leur réunion est E
- Deux classes distinctes sont disjointes

Théorème 1

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E.

- Pour $x \in E$, la classe d'équivalence de x est l'ensemble des éléments en relation avec x : $\quad \mathrm{cl}(x) \underset{\text{déf.}}{=} \{y \in E \mid x \mathscr{R} y\}$
- Les classes d'équivalence forment une *partition* de E.

2 Relations d'équivalence

- Aucune n'est vide
- Leur réunion est E
- Deux classes distinctes sont disjointes

Théorème 1

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E.

- Pour $x \in E$, la classe d'équivalence de x est l'ensemble des éléments en relation avec x : $\quad \mathrm{cl}(x) \underset{\text{déf.}}{=} \{y \in E \mid x \mathscr{R} y\}$
- Les classes d'équivalence forment une *partition* de E.

Exercice 4

1. Montrer que pour tous $x, y \in E$: $\quad \mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y) \iff x \mathscr{R} y$.
2. Montrer que les classes d'équivalences pour $\mathscr{R}$ forment une *partition* de E

2 Relations d'équivalence

Théorème 1

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E.

- Pour $x \in E$, la classe d'équivalence de x est l'ensemble des éléments en relation avec x : $\quad \mathrm{cl}(x) \underset{\text{déf.}}{=} \{y \in E \mid x \mathscr{R} y\}$
- Les classes d'équivalence forment une *partition* de E.

Exercice 5

Déterminer les classes d'équivalence de $\mathbb{Z}$:

a) Pour la congruence modulo 2

b) Pour la congruence modulo $n \in \mathbb{N}^*$