Applications

Chapitre 9

I Injections, surjections, bijections

1 Les définitions

Définition 1

Une application f de E dans F associe à tout élément $x \in E$ un unique élément de F, appelé son image et noté $f(x)$.

1 Les définitions

Définition 1

Une application f de E dans F associe à tout élément $x \in E$ un unique élément de F, appelé son image et noté $f(x)$.

- Un *antécédent* de $y \in F$ par f est :

1 Les définitions

Définition 1

Une application f de E dans F associe à tout élément $x \in E$ un unique élément de F, appelé son image et noté $f(x)$.

- Un *antécédent* de $y \in F$ par f est : un x de E tel que $f(x) = y$.

1 Les définitions

Définition 1

Une application f de E dans F associe à tout élément $x \in E$ un unique élément de F, appelé son image et noté $f(x)$.

- Un *antécédent* de $y \in F$ par f est : un x de E tel que $f(x) = y$.
- E est appelé :
- F est appelé :

1 Les définitions

Définition 1

Une application f de E dans F associe à tout élément $x \in E$ un unique élément de F, appelé son image et noté $f(x)$.

- Un *antécédent* de $y \in F$ par f est : un x de E tel que $f(x) = y$.
- E est appelé : ensemble de départ de f
- F est appelé :

1 Les définitions

Définition 1

Une application f de E dans F associe à tout élément $x \in E$ un unique élément de F, appelé son image et noté $f(x)$.

- Un *antécédent* de $y \in F$ par f est : un x de E tel que $f(x) = y$.
- E est appelé : ensemble de départ de f
- F est appelé : ensemble d'arrivée de f

1 Les définitions

Définition 1

Une application f de E dans F associe à tout élément $x \in E$ un unique élément de F, appelé son image et noté $f(x)$.

- Un *antécédent* de $y \in F$ par f est : un x de E tel que $f(x) = y$.
- E est appelé : ensemble de départ de f
- F est appelé : ensemble d'arrivée de f
- Un élément $x \in E$ a :
- Un élément $y \in F$ peut avoir :

1 Les définitions

Définition 1

Une application f de E dans F associe à tout élément $x \in E$ un unique élément de F, appelé son image et noté $f(x)$.

- Un *antécédent* de $y \in F$ par f est : un x de E tel que $f(x) = y$.
- E est appelé : ensemble de départ de f
- F est appelé : ensemble d'arrivée de f
- Un élément $x \in E$ a : une seule image par f
- Un élément $y \in F$ peut avoir :

1 Les définitions

Définition 1

Une application f de E dans F associe à tout élément $x \in E$ un unique élément de F, appelé son image et noté $f(x)$.

- Un *antécédent* de $y \in F$ par f est : un x de E tel que $f(x) = y$.
- E est appelé : ensemble de départ de f
- F est appelé : ensemble d'arrivée de f
- Un élément $x \in E$ a : une seule image par f
- Un élément $y \in F$ peut avoir : 0, 1 ou plusieurs antécédents

1 Les définitions

Définition 1

- Un *antécédent* de $y \in F$ par f est : un x de E tel que $f(x) = y$.
- E est appelé : ensemble de départ de f
- F est appelé : ensemble d'arrivée de f
- Un élément $x \in E$ a : une seule image par f
- Un élément $y \in F$ peut avoir : 0, 1 ou plusieurs antécédents

Notation

L'ensemble des applications de E dans F est noté : $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E

1 Les définitions

Définition 1

- Un *antécédent* de $y \in F$ par f est : un x de E tel que $f(x) = y$.
- E est appelé : ensemble de départ de f
- F est appelé : ensemble d'arrivée de f
- Un élément $x \in E$ a : une seule image par f
- Un élément $y \in F$ peut avoir : 0, 1 ou plusieurs antécédents

Notation

L'ensemble des applications de E dans F est noté : $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E

Exemple 1

Trouver les antécédents de i, 0 et $3 + 4i$ par a) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{ix} \end{array}$

1 Les définitions

Définition 1

- Un *antécédent* de $y \in F$ par f est : un x de E tel que $f(x) = y$.
- E est appelé : ensemble de départ de f
- F est appelé : ensemble d'arrivée de f
- Un élément $x \in E$ a : une seule image par f
- Un élément $y \in F$ peut avoir : 0, 1 ou plusieurs antécédents

Notation

L'ensemble des applications de E dans F est noté : $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E

Exemple 1

Trouver les antécédents de i, 0 et $3 + 4i$ par b) $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}$

Définition 2

Une application $f : E \to F$ est dite :

- *Injective* si :
- *Surjective* si :
- *Bijective* si :

1 Les définitions

Définition 2

Une application $f : E \to F$ est dite :

- *Injective* si : tout élément de F a *au plus* un antécédent par f.
- *Surjective* si :
- *Bijective* si :

1 Les définitions

Définition 2

Une application $f : E \to F$ est dite :

- *Injective* si : tout élément de F a *au plus* un antécédent par f.
- *Surjective* si : tout élément de F a *au moins* un antécédent par f.
- *Bijective* si :

1 Les définitions

Définition 2

Une application $f : E \to F$ est dite :

- *Injective* si : tout élément de F a *au plus* un antécédent par f.
- *Surjective* si : tout élément de F a *au moins* un antécédent par f.
- *Bijective* si :tout élément de F a *exactement* un antécédent par f

1 Les définitions

Définition 2

Une application $f : E \to F$ est dite :

- *Injective* si : tout élément de F a *au plus* un antécédent par f.
- *Surjective* si : tout élément de F a *au moins* un antécédent par f.
- *Bijective* si :tout élément de F a *exactement* un antécédent par f *i.e.* si f est injective et surjective

1 Les définitions

Définition 2

Une application $f : E \to F$ est dite :

- *Injective* si : tout élément de F a *au plus* un antécédent par f.
- *Surjective* si : tout élément de F a *au moins* un antécédent par f.
- *Bijective* si :tout élément de F a *exactement* un antécédent par f *i.e.* si f est injective et surjective

SF 5/SF 8 : montrer que f n'est pas injective/surjective

Exemple 2 : Sont-elles injectives ? Surjectives ?

a) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$

b) $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}$

2 Prouver l'injectivité en pratique

Pour montrer que f est injective

f est injective ssi pour tous $x, x' \in E$:

2 Prouver l'injectivité en pratique

Pour montrer que f est injective

f est injective ssi pour tous $x, x' \in E$: $\boxed{f(x) = f(x') \implies x = x'}$

2 Prouver l'injectivité en pratique

Pour montrer que f est injective

f est injective ssi pour tous $x, x' \in E$: $\boxed{f(x) = f(x') \implies x = x'}$

Rédaction type

« Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$ »

2 Prouver l'injectivité en pratique

Pour montrer que f est injective

f est injective ssi pour tous $x, x' \in E$: $\boxed{f(x) = f(x') \implies x = x'}$

Rédaction type

« Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$ »

$\dots$

$\dots$ donc $x = x'$.

2 Prouver l'injectivité en pratique

Pour montrer que f est injective

f est injective ssi pour tous $x, x' \in E$: $\boxed{f(x) = f(x') \implies x = x'}$

Rédaction type

« Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$ »

$\dots$

$\dots$ donc $x = x'$.

Exemple 3

Montrer que l'application $f : z \mapsto \dfrac{z+i}{z-i}$ est injective sur $\mathbb{C} \setminus \{i\}$.

Théorème 1 : Cas des fonctions réelles

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$.

2 Prouver l'injectivité en pratique

Théorème 1 : Cas des fonctions réelles

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$.
Si f est strictement monotone sur D, alors f est injective.

Théorème 1 : Cas des fonctions réelles

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$.
Si f est strictement monotone sur D, alors f est injective.

Exercice 1

Démontrer ce théorème dans le cas où f est strictement croissante.

3 Prouver la surjectivité en pratique

Pour montrer que f est surjective

On fixe $y \in F$, puis on construit $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

3 Prouver la surjectivité en pratique

Je sais trouver une solution

Pour montrer que f est surjective

On fixe $y \in F$, puis on construit $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

3 Prouver la surjectivité en pratique

Je sais trouver une solution

Pour montrer que f est surjective

On fixe $y \in F$, puis on construit $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Exemple 4

Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}$ est surjective.

II Composition, réciproque

1 Composition des applications

Cadre

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Définition 1

La *composée de* f *par* g est l'application $g \circ f : E \to G$ définie par :

Cadre

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & F \arrow[r, "g"] & G
\end{tikzcd}
$$

$$x \longmapsto f(x)$$

Définition 1

La *composée de f par g* est l'application $g \circ f : E \to G$ définie par :

1 Composition des applications

Cadre

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & F \arrow[r, "g"] & G \\ x \arrow[r, mapsto] & f(x) \arrow[r, mapsto] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

Définition 1

La *composée de f par g* est l'application $g \circ f : E \to G$ définie par :

$$\forall x \in E, \qquad g \circ f(x) \underset{\text{déf.}}{=} g(f(x))$$

1 Composition des applications

Cadre

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & F \arrow[r, "g"] & G
\end{tikzcd}
$$

$$x \longmapsto f(x) \longmapsto g(f(x))$$

Définition 1

La *composée de f par g* est l'application $g \circ f : E \to G$ définie par :

$$\forall x \in E, \qquad g \circ f(x) \underset{\text{déf.}}{=} g(f(x))$$

Théorème 1 : Associativité

Si $h : G \to H$ est une application :

1 Composition des applications

Cadre

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & F \arrow[r, "g"] & G \\ x \arrow[r, mapsto] & f(x) \arrow[r, mapsto] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

Définition 1

La *composée de* f *par* g est l'application $g \circ f : E \to G$ définie par :

$$\forall x \in E, \qquad g \circ f(x) \underset{\text{déf.}}{=} g(f(x))$$

Théorème 1 : Associativité

Si $h : G \to H$ est une application : $\quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Exercice 1

Démontrer ce théorème

1 Composition des applications

Définition 2

- L'*identité de E* est l'application Id_E :

Définition 2

- L'*identité de E* est l'application $\quad \mathrm{Id}_E : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$

Définition 2

- L'*identité de E* est l'application $\quad \mathrm{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$
- $\mathrm{Id}_F \circ f = f$
- $f \circ \mathrm{Id}_E = f$

Définition 2

- L'*identité de E* est l'application $\quad \mathrm{Id}_E : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$
- $\mathrm{Id}_F \circ f = f$
- $f \circ \mathrm{Id}_E = f$

Théorème 2

- Si f et g sont injectives, alors :
- Si f et g sont surjectives, alors :
- Si f et g sont bijectives, alors :

1 Composition des applications

Définition 2

- L'*identité de E* est l'application $\quad \mathrm{Id}_E : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$
- $\mathrm{Id}_F \circ f = f$
- $f \circ \mathrm{Id}_E = f$

Théorème 2

- Si f et g sont injectives, alors : $\quad g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors :
- Si f et g sont bijectives, alors :

Définition 2

- L'*identité de E* est l'application $\quad \mathrm{Id}_E : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$
- $\mathrm{Id}_F \circ f = f$
- $f \circ \mathrm{Id}_E = f$

Théorème 2

- Si f et g sont injectives, alors : $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors : $g \circ f$ est surjective.
- Si f et g sont bijectives, alors :

1 Composition des applications

Définition 2

- L'*identité de E* est l'application $\mathrm{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$
- $\mathrm{Id}_F \circ f = f$
- $f \circ \mathrm{Id}_E = f$

Théorème 2

- Si f et g sont injectives, alors : $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors : $g \circ f$ est surjective.
- Si f et g sont bijectives, alors : $g \circ f$ est bijective.

1 Composition des applications

Définition 2

- L'*identité de E* est l'application $\mathrm{Id}_E : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$
- $\mathrm{Id}_F \circ f = f$
- $f \circ \mathrm{Id}_E = f$

Théorème 2

- Si f et g sont injectives, alors : $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors : $g \circ f$ est surjective.
- Si f et g sont bijectives, alors : $g \circ f$ est bijective.

Exercice 2

Démontrer les deux premiers points

2 Réciproque d'une bijection

Définition 3

Soit $f : E \to F$ une application bijective. La *réciproque* de f est l'application $f^{-1} : F \to E$ qui, à tout $y \in F$ associe son unique antécédent par f : ■

2 Réciproque d'une bijection

Définition 3

Soit $f : E \to F$ une application bijective. La *réciproque* de f est l'application $f^{-1} : F \to E$ qui, à tout $y \in F$ associe son unique antécédent par f :

- $f^{-1}(y)$ est l'unique $x \in E$ solution de $f(x) = y$

2 Réciproque d'une bijection

Définition 3

Soit $f : E \to F$ une application bijective. La *réciproque* de f est l'application $f^{-1} : F \to E$ qui, à tout $y \in F$ associe son unique antécédent par f :

- $f^{-1}(y)$ est l'unique $x \in E$ solution de $f(x) = y$

Pour $x \in E$ et $y \in F$

- $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$

2 Réciproque d'une bijection

Définition 3

Soit $f : E \to F$ une application bijective. La *réciproque* de f est l'application $f^{-1} : F \to E$ qui, à tout $y \in F$ associe son unique antécédent par f :

- $f^{-1}(y)$ est l'unique $x \in E$ solution de $f(x) = y$

Pour $x \in E$ et $y \in F$

- $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$

Exemple 1

$f : x \mapsto e^x$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de réciproque $f^{-1} : y \mapsto \ln y$.

Définition 3

Soit $f : E \to F$ une application bijective. La *réciproque* de f est l'application $f^{-1} : F \to E$ qui, à tout $y \in F$ associe son unique antécédent par f :

- $f^{-1}(y)$ est l'unique $x \in E$ solution de $f(x) = y$

Pour $x \in E$ et $y \in F$

- $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$

Exemple 1

$f : x \mapsto e^x$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de réciproque $f^{-1} : y \mapsto \ln y$.

Remarque

Si f est bijective :

1.

2.

2 Réciproque d'une bijection

Définition 3

Soit $f : E \to F$ une application bijective. La *réciproque* de f est l'application $f^{-1} : F \to E$ qui, à tout $y \in F$ associe son unique antécédent par f : ▪ $f^{-1}(y)$ est l'unique $x \in E$ solution de $f(x) = y$
Pour $x \in E$ et $y \in F$ ▪ $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$

Exemple 1

$f : x \mapsto e^x$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de réciproque $f^{-1} : y \mapsto \ln y$.

Remarque

Si f est bijective :

1. $\forall x \in E, \quad f^{-1}(f(x)) =$
2.

2 Réciproque d'une bijection

Définition 3

Soit $f : E \to F$ une application bijective. La *réciproque* de f est l'application $f^{-1} : F \to E$ qui, à tout $y \in F$ associe son unique antécédent par f : ▪ $f^{-1}(y)$ est l'unique $x \in E$ solution de $f(x) = y$

Pour $x \in E$ et $y \in F$ ▪ $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$

Exemple 1

$f : x \mapsto e^x$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de réciproque $f^{-1} : y \mapsto \ln y$.

Remarque

Si f est bijective :

1. $\forall x \in E, \quad f^{-1}(f(x)) = x$
2.

2 Réciproque d'une bijection

Définition 3

Soit $f : E \to F$ une application bijective. La *réciproque* de f est l'application $f^{-1} : F \to E$ qui, à tout $y \in F$ associe son unique antécédent par f :

- $f^{-1}(y)$ est l'unique $x \in E$ solution de $f(x) = y$

Pour $x \in E$ et $y \in F$

- $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$

Exemple 1

$f : x \mapsto e^x$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de réciproque $f^{-1} : y \mapsto \ln y$.

Remarque

Si f est bijective :

1. $\forall x \in E, \quad f^{-1}(f(x)) = x$
2. $\forall y \in F, \quad f(f^{-1}(y)) = y$.

2 Réciproque d'une bijection

Remarque

Si f est bijective :

1. $\forall x \in E, \quad f^{-1}(f(x)) = x.$
2. $\forall y \in F, \quad f(f^{-1}(y)) = y.$

Théorème 3

Si $f : E \to F$ est bijective :

1.
2.

Remarque

Si f est bijective :

1. $\forall x \in E, \quad f^{-1}(f(x)) = x.$
2. $\forall y \in F, \quad f(f^{-1}(y)) = y.$

Théorème 3

Si $f : E \to F$ est bijective :

1. $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$
2. $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$

2 Réciproque d'une bijection

Remarque

Si f est bijective :

1. $\forall x \in E, \quad f^{-1}(f(x)) = x.$
2. $\forall y \in F, \quad f(f^{-1}(y)) = y.$

Théorème 3

Si $f : E \to F$ est bijective :

1. $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$
2. $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$

2 Réciproque d'une bijection

Théorème 4

Soit $f : E \to F$ une application.

2 Réciproque d'une bijection

A priori quelconque

Théorème 4

Soit $f : E \to F$ une application.

A priori quelconque

Théorème 4

Soit $f : E \to F$ une application. On suppose qu'il existe $g : F \to E$ telle que : $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
Alors :

2 Réciproque d'une bijection

A priori
quelconque

Théorème 4

Soit $f : E \to F$ une application. On suppose qu'il existe $g : F \to E$ telle que : $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
Alors : f est bijective et $g = f^{-1}$

A priori quelconque

Théorème 4

Soit $f : E \to F$ une application. On suppose qu'il existe $g : F \to E$ telle que : $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
Alors : f est bijective et $g = f^{-1}$

Exercice 3

Démontrer le théorème.

2 Réciproque d'une bijection

SF 10 : Montrer que $f : E \to F$ est bijective		
Méthode 1	**Méthode 2**	**Méthode 3**

SF 10 : Montrer que $f : E \to F$ est bijective

Méthode 1	**Méthode 2**	**Méthode 3** On montre que f est injective et surjective

2 Réciproque d'une bijection

SF 10 : Montrer que $f : E \to F$ est bijective		
Méthode 1 On trouve $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$	**Méthode 2**	**Méthode 3** On montre que f est injective et surjective

2 Réciproque d'une bijection

SF 10 : Montrer que $f : E \to F$ est bijective

Méthode 1	**Méthode 2**	**Méthode 3**
On trouve $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$	On fixe $y \in F$ et on résout $f(x) = y$	On montre que f est injective et surjective

Bijectivité + Réciproque

Bijectivité + Réciproque

Bijectivité

SF 10 : Montrer que $f : E \to F$ est bijective

Méthode 1	**Méthode 2**	**Méthode 3**
On trouve $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$	On fixe $y \in F$ et on résout $f(x) = y$	On montre que f est injective et surjective

Bijectivité + Réciproque | Bijectivité + Réciproque | Bijectivité

SF 10 : Montrer que $f : E \to F$ est bijective

Méthode 1	**Méthode 2**	**Méthode 3**
On trouve $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$	On fixe $y \in F$ et on résout $f(x) = y$	On montre que f est injective et surjective

Exemple 2

Prouver que f est bijective et déterminer sa réciproque.

a) $f : t \mapsto (1-t)a + tb$ de $[0\,,1]$ sur $[a\,,b]$

2 Réciproque d'une bijection

Bijectivité + Réciproque

Bijectivité + Réciproque

Bijectivité

SF 10 : Montrer que $f : E \to F$ est bijective		
Méthode 1 On trouve $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$	**Méthode 2** On fixe $y \in F$ et on résout $f(x) = y$	**Méthode 3** On montre que f est injective et surjective

Exemple 2

Prouver que f est bijective et déterminer sa réciproque.

b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}^*$

Bijectivité + Réciproque | Bijectivité + Réciproque | Bijectivité

SF 10 : Montrer que $f : E \to F$ est bijective

Méthode 1 On trouve $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$	**Méthode 2** On fixe $y \in F$ et on résout $f(x) = y$	**Méthode 3** On montre que f est injective et surjective

Exemple 2

Prouver que f est bijective et déterminer sa réciproque.

c) $f : z \mapsto \dfrac{z+i}{z-i}$ de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Théorème 5 : Réciproque d'une composée

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et :

2 Réciproque d'une bijection

Théorème 5 : Réciproque d'une composée

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

2 Réciproque d'une bijection

Théorème 5 : Réciproque d'une composée

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Exercice 4

Démontrer le théorème précédent.

III Action de f sur les sous-ensembles

1 Image directe, image réciproque

Définition 1

Soit $A \subset E$. L'*image* de A par f est l'ensemble, noté $f(A)$, des images par f des éléments de A :

1 Image directe, image réciproque

Définition 1

Soit $A \subset E$. L'*image* de A par f est l'ensemble, noté $f(A)$, des images par f des éléments de A :

$$f(A) \underset{\text{déf.}}{=} \{f(x)\ ,\ x \in A\}$$

1 Image directe, image réciproque

Définition 1

Soit $A \subset E$. L'*image* de A par f est l'ensemble, noté $f(A)$, des images par f des éléments de A :

$$f(A) \underset{\text{déf.}}{=} \{f(x)\ ,\ x \in A\}$$

Retenir

$y \in f(A)$ signifie :

1 Image directe, image réciproque

Définition 1

Soit $A \subset E$. L'*image* de A par f est l'ensemble, noté $f(A)$, des images par f des éléments de A :

$$f(A) \underset{\text{déf.}}{=} \{f(x)\ ,\ x \in A\}$$

Retenir

$y \in f(A)$ signifie : il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$

Définition 1

Soit $A \subset E$. L'*image* de A par f est l'ensemble, noté $f(A)$, des images par f des éléments de A :

$$f(A) \underset{\text{déf.}}{=} \{f(x)\ ,\ x \in A\}$$

Retenir

$y \in f(A)$ signifie : il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$

1 Image directe, image réciproque

Définition 1

Soit $A \subset E$. L'*image* de A par f est l'ensemble, noté $f(A)$, des images par f des éléments de A :

$$f(A) \underset{\text{déf.}}{=} \{f(x) \, , \; x \in A\}$$

Retenir

$y \in f(A)$ signifie : il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$

Exemple 1

1. Déterminer l'image de $[-1\,,2]$ par la fonction $f : x \mapsto x^2$.
2. Déterminer l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction $f : x \mapsto xe^x$.

1 Image directe, image réciproque

Définition 1

Soit $A \subset E$. L'*image* de A par f est l'ensemble, noté $f(A)$, des images par f des éléments de A :

$$f(A) \underset{\text{déf.}}{=} \{f(x)\ ,\ x \in A\}$$

Retenir

$y \in f(A)$ signifie : il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$

Exemple 2

On considère l'application $f : z \mapsto \exp z$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
Déterminer $f(i\mathbb{R})$.

1 Image directe, image réciproque

Définition 1

Soit $A \subset E$. L'*image* de A par f est l'ensemble, noté $f(A)$, des images par f des éléments de A :

$$f(A) \underset{\text{déf.}}{=} \{f(x)\ ,\ x \in A\}$$

Retenir

$y \in f(A)$ signifie : il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$

Exemple 3

On considère l'application $f : z \mapsto z^2$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et on note Δ la droite d'équation $y = x$. Montrer que : $f(\Delta) = i\mathbb{R}_+$

1 Image directe, image réciproque

Définition 2

Soit $B \subset F$. L'*image réciproque* de B par f est l'ensemble, noté $f^{-1}(B)$ des antécédents par f des éléments de B

1 Image directe, image réciproque

Définition 2

Soit $B \subset F$. L'*image réciproque* de B par f est l'ensemble, noté $f^{-1}(B)$ des antécédents par f des éléments de B

$$f^{-1}(B) \underset{\text{déf.}}{=} \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Définition 2

Soit $B \subset F$. L'*image réciproque* de B par f est l'ensemble, noté $f^{-1}(B)$ des antécédents par f des éléments de B

$$f^{-1}(B) \underset{\text{déf.}}{=} \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Retenir

$x \in f^{-1}(B)$ signifie :

Définition 2

Soit $B \subset F$. L'*image réciproque* de B par f est l'ensemble, noté $f^{-1}(B)$ des antécédents par f des éléments de B

$$f^{-1}(B) \underset{\text{déf.}}{=} \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Retenir

$x \in f^{-1}(B)$ signifie : $f(x) \in B$

Définition 2

Soit $B \subset F$. L'*image réciproque* de B par f est l'ensemble, noté $f^{-1}(B)$ des antécédents par f des éléments de B

$$f^{-1}(B) \underset{\text{déf.}}{=} \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Retenir

$x \in f^{-1}(B)$ signifie : $f(x) \in B$

Attention

$f^{-1}(B)$ est défini même si :

Définition 2

Soit $B \subset F$. L'*image réciproque* de B par f est l'ensemble, noté $f^{-1}(B)$ des antécédents par f des éléments de B

$$f^{-1}(B) \underset{\text{déf.}}{=} \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Retenir

$x \in f^{-1}(B)$ signifie : $f(x) \in B$

Attention

$f^{-1}(B)$ est défini même si : f n'est pas bijective

Définition 2

Soit $B \subset F$. L'*image réciproque* de B par f est l'ensemble, noté $f^{-1}(B)$ des antécédents par f des éléments de B

$$f^{-1}(B) \underset{\text{déf.}}{=} \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Retenir

$x \in f^{-1}(B)$ signifie : $f(x) \in B$

« bloc » défini sans utiliser f^{-1}

Attention

$f^{-1}(B)$ est défini même si : f n'est pas bijective

SF 12 : Cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

- Trouver $f^{-1}(\{y\})$ revient à résoudre :
- Trouver $f^{-1}([a\,,b])$ revient à résoudre :

SF 12 : Cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

- Trouver $f^{-1}(\{y\})$ revient à résoudre : $f(x) = y$
- Trouver $f^{-1}([a\,,b])$ revient à résoudre :

SF 12 : Cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

- Trouver $f^{-1}(\{y\})$ revient à résoudre : $f(x) = y$
- Trouver $f^{-1}([a\,,b])$ revient à résoudre : $a \leq f(x) \leq b$

Exemple 4

1. Déterminer l'image réciproque de $[1\,,2]$ par exp

SF 12 : Cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

- Trouver $f^{-1}(\{y\})$ revient à résoudre : $f(x) = y$
- Trouver $f^{-1}([a\,,b])$ revient à résoudre : $a \leq f(x) \leq b$

Exemple 4

1. Déterminer l'image réciproque de $[1\,,2]$ par exp
2. Déterminer l'image réciproque de $[4\,,+\infty[$ par $f : x \mapsto x^2$.

SF 12 : Cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

- Trouver $f^{-1}(\{y\})$ revient à résoudre : $f(x) = y$
- Trouver $f^{-1}([a\,,b])$ revient à résoudre : $a \leq f(x) \leq b$

Exemple 4

1. Déterminer l'image réciproque de $[1\,,2]$ par exp
2. Déterminer l'image réciproque de $[4\,,+\infty[$ par $f : x \mapsto x^2$.
3. Soit $f : x \mapsto \sin x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Déterminer : $\quad f^{-1}(\{0\}) \quad$ et $\quad f^{-1}([2\,,3])$.

SF 12 : Cas général

Exemple 5

1. On considère l'application $f : z \mapsto z^2$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
   Montrer que : $\quad f^{-1}(\mathbb{R}_-^*) = i\mathbb{R}^*$.

Exercice 1 : Partition de l'ensemble de départ par f

Montrer que :

$$E = \bigcup_{y \in f(E)} f^{-1}(\{y\})$$

Exercice 1 : Partition de l'ensemble de départ par f

Montrer que :

$$E = \bigcup_{y \in f(E)} f^{-1}(\{y\})$$

Ensemble des antécédents de y par f :

Exercice 1 : Partition de l'ensemble de départ par f

Montrer que :

$$E = \bigcup_{y \in f(E)} f^{-1}(\{y\})$$

1 Image directe, image réciproque

Ensemble des antécédents de y par f :
$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E \mid f(x) = y\}$

Exercice 1 : Partition de l'ensemble de départ par f

Montrer que :

$$E = \bigcup_{y \in f(E)} f^{-1}(\{y\})$$

2 Prolongement, restriction d'une application

Définition 3

Soient $f : E \to F$ et A une partie de E.
La restriction de f à A est l'application $f_{|_A} : A \to F$ définie par :

Définition 3

Soient $f : E \to F$ et A une partie de E.
La restriction de f à A est l'application $f_{|_A} : A \to F$ définie par :

$$\forall x \in A, \qquad f_{|_A}(x) = f(x)$$

2 Prolongement, restriction d'une application

Définition 3

Soient $f : E \to F$ et A une partie de E.
La restriction de f à A est l'application $f_{|_A} : A \to F$ définie par :

$$\forall x \in A, \qquad f_{|_A}(x) = f(x)$$

Exemple 6

Que peut-on dire de la restriction de la fonction tan à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$?

2 Prolongement, restriction d'une application

Définition 4

Soient A une partie de E et $f : A \to F$.

Un prolongement de f à E est une application $\widetilde{f} : E \to F$ telle que :

2 Prolongement, restriction d'une application

Définition 4

Soient A une partie de E et $f : A \to F$.
Un prolongement de f à E est une application $\widetilde{f} : E \to F$ telle que :

$$\forall x \in A, \quad \widetilde{f}(x) = f(x)$$

2 Prolongement, restriction d'une application

Définition 4

Soient A une partie de E et $f : A \to F$.
Un prolongement de f à E est une application $\widetilde{f} : E \to F$ telle que :

$$\forall x \in A, \quad \widetilde{f}(x) = f(x)$$

Exemple 7

On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{x} \end{array}$.
Peut-on prolonger f à $\mathbb{R}$ en une fonction continue ?