Suites

Niveau 1

Chapitre 10

I Vocabulaire de base

1 Généralités

Définition 1

Une *suite* réelle est :

1 Généralités

Définition 1

Une *suite* réelle est : une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

1 Généralités

Définition 1

Une *suite* réelle est : une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

l'application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$	la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
l'image de n par u	u_n
la suite u	
l'ensemble des suites réelles	

1 Généralités

Définition 1

Une *suite* réelle est : une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

l'application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$	la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
l'image de n par u	u_n
la suite u	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
l'ensemble des suites réelles	

1 Généralités

Définition 1

Une *suite* réelle est : une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

l'application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$	la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
l'image de n par u	u_n
la suite u	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
l'ensemble des suites réelles	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

1 Généralités

Définition 1

Une *suite* réelle est : une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

l'application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$	la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
l'image de n par u	u_n
la suite u	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
l'ensemble des suites réelles	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Généralisation

Famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un ensemble E indexée par I.

1 Généralités

Définition 1

Une *suite* réelle est : une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

l'application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$	la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
l'image de n par u	u_n
la suite u	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
l'ensemble des suites réelles	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Généralisation

Famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un ensemble E indexée par I.

$=$ application u de I dans E

2 Définitions liées à l'ordre

Définition 2

Une suite réelle u est dite :

- *majorée* si :
- *minorée* si :
- *bornée* si :

2 Définitions liées à l'ordre

Définition 2

Une suite réelle u est dite :

- *majorée* si : $\quad \exists M \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$
- *minorée* si :
- *bornée* si :

2 Définitions liées à l'ordre

Définition 2

Une suite réelle u est dite :

- *majorée* si : $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$
- *minorée* si : $\exists m \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m.$
- *bornée* si :

Définition 2

Une suite réelle u est dite :

- *majorée* si : $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$
- *minorée* si : $\exists m \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m.$
- *bornée* si : elle est majorée et minorée

2 Définitions liées à l'ordre

Définition 2

Une suite réelle u est dite :

- *majorée* si : $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$
- *minorée* si : $\exists m \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m.$
- *bornée* si : elle est majorée et minorée
  c'est équivalent à : $\exists K \in \mathbb{R}_+ \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq K.$

2 Définitions liées à l'ordre

Définition 2

Une suite réelle u est dite :

- *majorée* si : $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$
- *minorée* si : $\exists m \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m.$
- *bornée* si : elle est majorée et minorée
  c'est équivalent à : $\exists K \in \mathbb{R}_+ \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq K.$

Exemple 1

Montrer que la suite $u = \left(\dfrac{\sin n}{3 - \cos n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

2 Définitions liées à l'ordre

Définition 2

Une suite réelle u est dite :

- *majorée* si : $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$
- *minorée* si : $\exists m \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m.$
- *bornée* si : elle est majorée et minorée
  c'est équivalent à : $\exists K \in \mathbb{R}_+ \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq K.$

SF 3 : Majorer une somme

Exemple 2

Soit $q \in]0\,,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln(1+q^k)$.

Montrer que u est majorée.

2 Définitions liées à l'ordre

Théorème 1

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Si u est bornée et si v converge vers 0, alors :

Théorème 1

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Si u est bornée et si v converge vers 0, alors : $\quad u_n v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$

Théorème 1

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Si u est bornée et si v converge vers 0, alors : $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exemple 3

La suite $\left(\frac{\sin n}{n}\right)$ converge vers 0 car :

Théorème 1

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Si u est bornée et si v converge vers 0, alors : $u_n v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Exemple 3

La suite $\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)$ converge vers 0 car : $\begin{cases} (\sin n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{est bornée} \\ \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 & \end{cases}.$

2 Définitions liées à l'ordre

Définition 3

Une suite réelle u est dite :

- *croissante* si :
- *décroissante* si :
- *strictement croissante* si
- *strictement décroissante* si :

2 Définitions liées à l'ordre

Définition 3

Une suite réelle u est dite :

- *croissante* si :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$.
- *strictement croissante* si
- *décroissante* si :
- *strictement décroissante* si :

2 Définitions liées à l'ordre

Définition 3

Une suite réelle u est dite :

- *croissante* si :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$.
- *strictement croissante* si
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}$.
- *décroissante* si :
- *strictement décroissante* si :

2 Définitions liées à l'ordre

Définition 3

Une suite réelle u est dite :

- *croissante* si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$.
- *strictement croissante* si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}$.
- *décroissante* si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_{n+1}$.
- *strictement décroissante* si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > u_{n+1}$.

2 Définitions liées à l'ordre

monotone =
croissante ou décroissante

Définition 3

Une suite réelle u est dite :

- *croissante* si :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$.
- *strictement croissante* si
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}$.
- *décroissante* si :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_{n+1}$.
- *strictement décroissante* si :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > u_{n+1}$.

monotone =
croissante ou décroissante

Définition 3

Une suite réelle u est dite :

- *croissante* si :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$.
- *strictement croissante* si
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}$.
- *décroissante* si :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_{n+1}$.
- *strictement décroissante* si :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > u_{n+1}$.

SF 4 : Deux méthodes pour établir la monotonie

Exemple 4 : Etudier la monotonie

a) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

monotone =
croissante ou décroissante

Définition 3

Une suite réelle u est dite :

- *croissante* si :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$.
- *strictement croissante* si
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}$.
- *décroissante* si :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_{n+1}$.
- *strictement décroissante* si :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > u_{n+1}$.

SF 4 : Deux méthodes pour établir la monotonie

Exemple 4 : Etudier la monotonie

b) $v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2k^2}\right)$

monotone =
croissante ou décroissante

Définition 3

Une suite réelle u est dite :

- *croissante* si :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$.
- *strictement croissante* si
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}$.
- *décroissante* si :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_{n+1}$.
- *strictement décroissante* si :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > u_{n+1}$.

SF 4 : Deux méthodes pour établir la monotonie

Exemple 4 : Etudier la monotonie

$$\text{c) } w_n = \frac{e^n}{n!}$$

monotone =
croissante ou décroissante

Définition 3

Une suite réelle u est dite :

- *croissante* si :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$.
- *strictement croissante* si
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}$.
- *décroissante* si :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_{n+1}$.
- *strictement décroissante* si :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > u_{n+1}$.

SF 4 : Deux méthodes pour établir la monotonie

Exemple 4 : Etudier la monotonie

e) $y_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{np} \frac{1}{k}$

Définition 4

- u est *arithmétique de raison r* si :

3 Suites arithmétiques, suites géométriques

Définition 4

- *u* est *arithmétique de raison r* si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$

3 Suites arithmétiques, suites géométriques

Définition 4

- u est *arithmétique de raison* r si : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$
  Le terme général est alors donné par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr$

3 Suites arithmétiques, suites géométriques

Définition 4

- u est *arithmétique de raison* r si : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$
  Le terme général est alors donné par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr$
- u est *géométrique de raison* q si : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n$

3 Suites arithmétiques, suites géométriques

Définition 4

- u est *arithmétique de raison* r si : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$
  Le terme général est alors donné par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr$
- u est *géométrique de raison* q si : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n$
  Le terme général est alors donné par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n u_0$

3 Suites arithmétiques, suites géométriques

Définition 4

- u est *arithmétique de raison* r si : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$
  Le terme général est alors donné par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr$
- u est *géométrique de raison* q si : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n$
  Le terme général est alors donné par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n u_0$

Théorème 2

	$q > 1$	$q = 1$	$\lvert q \rvert < 1$	$q \leq -1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$				

3 Suites arithmétiques, suites géométriques

Définition 4

- u est *arithmétique de raison r* si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$
  Le terme général est alors donné par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr$
- u est *géométrique de raison q* si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q u_n$
  Le terme général est alors donné par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n u_0$

Théorème 2

	$\mathbf{q > 1}$	$\mathbf{q = 1}$	$\mathbf{\lvert q\rvert < 1}$	$\mathbf{q \leq -1}$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$	$+\infty$			

3 Suites arithmétiques, suites géométriques

Définition 4

- u est *arithmétique de raison* r si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$
  Le terme général est alors donné par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr$
- u est *géométrique de raison* q si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n$
  Le terme général est alors donné par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n u_0$

Théorème 2

	$q > 1$	$q = 1$	$\lvert q \rvert < 1$	$q \leq -1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$	$+\infty$	1		

3 Suites arithmétiques, suites géométriques

Définition 4

- u est *arithmétique de raison r* si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$
  Le terme général est alors donné par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr$
- u est *géométrique de raison q* si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n$
  Le terme général est alors donné par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n u_0$

Théorème 2

	$q > 1$	$q = 1$	$\lvert q \rvert < 1$	$q \leq -1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$	$+\infty$	1	0	

3 Suites arithmétiques, suites géométriques

Définition 4

- u est *arithmétique de raison* r si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$
  Le terme général est alors donné par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr$
- u est *géométrique de raison* q si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n$
  Le terme général est alors donné par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n u_0$

Théorème 2

	$q > 1$	$q = 1$	$\lvert q \rvert < 1$	$q \leq -1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$	$+\infty$	1	0	Pas de limite

II Suites particulières

1 Suites arithmético-géométriques

Définition 1

$u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *arithmético-géométrique* s'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que :

1 Suites arithmético-géométriques

Définition 1

$u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *arithmético-géométrique* s'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$$

1 Suites arithmético-géométriques

Définition 1

$u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *arithmético-géométrique* s'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$$

Théorème 1 : Terme général

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 1$ et $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1 Suites arithmético-géométriques

Définition 1

$u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *arithmético-géométrique* s'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$$

Théorème 1 : Terme général

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 1$ et $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Il existe un unique $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que : $\quad \alpha = a\alpha + b$.

1 Suites arithmético-géométriques

Définition 1

$u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *arithmético-géométrique* s'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$$

Théorème 1 : Terme général

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 1$ et $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Il existe un unique $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que : $\quad \alpha = a\alpha + b$.
- La suite $v = \left(u_n - \alpha\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.

1 Suites arithmético-géométriques

Définition 1

$u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *arithmético-géométrique* s'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$$

Théorème 1 : Terme général

Si $a = 1$
u est arithmétique

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 1$ et $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Il existe un unique $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que : $\quad \alpha = a\alpha + b$.
- La suite $v = \left(u_n - \alpha\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.

1 Suites arithmético-géométriques

Définition 1

$u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *arithmético-géométrique* s'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$$

Théorème 1 : Terme général

Si $a = 1$
u est arithmétique

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 1$ et $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Il existe un unique $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que : $\quad \alpha = a\alpha + b$.
- La suite $v = \left(u_n - \alpha\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.

Exercice 1

Démontrer le théorème précédent.

SF 1 : Terme général d'une suite arithmético-géométrique

1. On introduit l'unique $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$.

1 Suites arithmético-géométriques

SF 1 : Terme général d'une suite arithmético-géométrique

1. On introduit l'unique $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$.
2. La suite $v = \left(u_n - \alpha\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a

1 Suites arithmético-géométriques

SF 1 : Terme général d'une suite arithmético-géométrique

1. On introduit l'unique $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$.
2. La suite $v = \left(u_n - \alpha\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a
3. *En calculant* α, on en déduit une expression de $u_n = v_n + \alpha$.

Exemple 1

Déterminer le terme général de la suite u définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2 - \frac{1}{2}u_n$$

1 Suites arithmético-géométriques

SF 1 : Terme général d'une suite arithmético-géométrique

1. On introduit l'unique $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$.
2. La suite $v = \left(u_n - \alpha\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a
3. *En calculant* α, on en déduit une expression de $u_n = v_n + \alpha$.

Exemple 2

Déterminer le terme général de la suite u définie par $u_1 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = 2u_n + 1$$

2 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre deux

On étudie les suites $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

2 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre deux

On étudie les suites $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Exercice 2

Pour quels $\lambda \in \mathbb{K}^*$ la suite géométrique $u = (\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $(\star)$?

2 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre deux

On étudie les suites $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

Equation caractéristique
$\lambda^2 - a\lambda - b = 0$

Exercice 2

Pour quels $\lambda \in \mathbb{K}^*$ la suite géométrique $u = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(\star)$?

Exercice 3

On suppose que $(\mathscr{C})$ possède une racine double λ_0 .
Vérifier que $u = (n\lambda_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait aussi $(\star)$.

2 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre deux

On étudie les suites $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Equation caractéristique
$\lambda^2 - a\lambda - b = 0$

Exercice 2

Pour quels $\lambda \in \mathbb{K}^*$ la suite géométrique $u = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(\star)$?

Exercice 3

$\lambda_0 = \frac{a}{2}$

On suppose que $(\mathscr{C})$ possède une racine double λ_0 .
Vérifier que $u = (n\lambda_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait aussi $(\star)$.

2 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre deux

On étudie les suites $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

Equation caractéristique
$\lambda^2 - a\lambda - b = 0$

Exercice 2

Pour quels $\lambda \in \mathbb{K}^*$ la suite géométrique $u = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(\star)$?

Exercice 3

$\lambda_0 = \frac{a}{2}$

On suppose que $(\mathscr{C})$ possède une racine double λ_0 .
Vérifier que $u = (n\lambda_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait aussi $(\star)$.

Exercice 4

On pose : $E = \left\{ u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \right\}$.

Montrer que : $\Phi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ u & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$ est bijective.

2 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre deux

On étudie les suites $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Equation caractéristique
$\lambda^2 - a\lambda - b = 0$

Exercice 2

Pour quels $\lambda \in \mathbb{K}^*$ la suite géométrique $u = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(\star)$?

Exercice 3

$\lambda_0 = \dfrac{a}{2}$

On suppose que $(\mathscr{C})$ possède une racine double λ_0 .
Vérifier que $u = (n\lambda_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait aussi $(\star)$.

Exercice 4

On pose : $E = \left\{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\right\}$.

Montrer que : $\Phi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ u & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$ est bijective.

E est de
« dimension 2 »

2 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre deux

Théorème 2 : Expression du terme général u_n en fonction de n

$\bullet \mathbb{K} = \mathbb{C}$

Discriminant	Racines	Il existe $A, B \in \mathbb{C}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2	
$\Delta = 0$	λ_0	

$\bullet \mathbb{K} = \mathbb{R}$

Discriminant	Racines	Il existe $A, B \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2	
$\Delta = 0$	λ_0	
$\Delta < 0$	$re^{\pm i\theta}$	

2 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre deux

Théorème 2 : Expression du terme général u_n en fonction de n

$\bullet \mathbb{K} = \mathbb{C}$

Discriminant	Racines	Il existe $A, B \in \mathbb{C}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2	$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$
$\Delta = 0$	λ_0	

$\bullet \mathbb{K} = \mathbb{R}$

Discriminant	Racines	Il existe $A, B \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2	
$\Delta = 0$	λ_0	
$\Delta < 0$	$re^{\pm i\theta}$	

2 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre deux

Théorème 2 : Expression du terme général u_n en fonction de n

$\bullet \mathbb{K} = \mathbb{C}$

Discriminant	Racines	Il existe $A, B \in \mathbb{C}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2	$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$
$\Delta = 0$	λ_0	$u_n = (A + nB)\lambda_0^n$

$\bullet \mathbb{K} = \mathbb{R}$

Discriminant	Racines	Il existe $A, B \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2	
$\Delta = 0$	λ_0	
$\Delta < 0$	$re^{\pm i\theta}$	

2 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre deux

Théorème 2 : Expression du terme général u_n en fonction de n

$\bullet \mathbb{K} = \mathbb{C}$

Discriminant	Racines	Il existe $A, B \in \mathbb{C}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2	$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$
$\Delta = 0$	λ_0	$u_n = (A + nB)\lambda_0^n$

$\bullet \mathbb{K} = \mathbb{R}$

Discriminant	Racines	Il existe $A, B \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2	$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$
$\Delta = 0$	λ_0	
$\Delta < 0$	$re^{\pm i\theta}$	

2 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre deux

Théorème 2 : Expression du terme général u_n en fonction de n

$\bullet \mathbb{K} = \mathbb{C}$

Discriminant	Racines	Il existe $A, B \in \mathbb{C}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2	$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$
$\Delta = 0$	λ_0	$u_n = (A + nB)\lambda_0^n$

$\bullet \mathbb{K} = \mathbb{R}$

Discriminant	Racines	Il existe $A, B \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2	$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$
$\Delta = 0$	λ_0	$u_n = (A + nB)\lambda_0^n$
$\Delta < 0$	$re^{\pm i\theta}$	

2 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre deux

Théorème 2 : Expression du terme général u_n en fonction de n

$\bullet \mathbb{K} = \mathbb{C}$

Discriminant	Racines	Il existe $A, B \in \mathbb{C}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2	$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$
$\Delta = 0$	λ_0	$u_n = (A + nB)\lambda_0^n$

$\bullet \mathbb{K} = \mathbb{R}$

Discriminant	Racines	Il existe $A, B \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2	$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$
$\Delta = 0$	λ_0	$u_n = (A + nB)\lambda_0^n$
$\Delta < 0$	$re^{\pm i\theta}$	$u_n = r^n\left(A\cos n\theta + B\sin n\theta\right)$

2 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre deux

Théorème 2 : Expression du terme général u_n en fonction de n

$\bullet \mathbb{K} = \mathbb{R}$

Discriminant	Racines	Il existe $A, B \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2	$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$
$\Delta = 0$	λ_0	$u_n = (A + nB)\lambda_0^n$
$\Delta < 0$	$re^{\pm i\theta}$	$u_n = r^n\big(A\cos n\theta + B\sin n\theta\big)$

Exemple 3 : Exprimer u_n en fonction de n

$u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

2 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre deux

Théorème 2 : Expression du terme général u_n en fonction de n

$\bullet \mathbb{K} = \mathbb{R}$

Discriminant	Racines	Il existe $A, B \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2	$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$
$\Delta = 0$	λ_0	$u_n = (A + nB)\lambda_0^n$
$\Delta < 0$	$re^{\pm i\theta}$	$u_n = r^n\left(A\cos n\theta + B\sin n\theta\right)$

Exemple 4

$u_0 = 2$, $u_1 = 0$ et et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.
Trouver r et θ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n = r^{n+3}\cos\left((n+1)\theta\right)$

2 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre deux

Théorème 2 : Expression du terme général u_n en fonction de n

$\bullet \mathbb{K} = \mathbb{R}$

Discriminant	Racines	Il existe $A, B \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2	$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$
$\Delta = 0$	λ_0	$u_n = (A + nB)\lambda_0^n$
$\Delta < 0$	$re^{\pm i\theta}$	$u_n = r^n\big(A\cos n\theta + B\sin n\theta\big)$

Exemple 5

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = \sqrt{3}u_{n+1} - u_n$.
Montrer que u est périodique

III Existence et/ou calcul de limites

1 Opérations sur les limites

Exemple 0

Etudier la limite de $\left(\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$

2 Limites et inégalités larges

Théorème 1 : Passages aux limites dans les inégalités larges

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Si :

2 Limites et inégalités larges

Théorème 1 : Passages aux limites dans les inégalités larges

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Si :

i) $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_2$.

2 Limites et inégalités larges

Théorème 1 : Passages aux limites dans les inégalités larges

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Si :

i) $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_2$.

ii) $u_n \leq v_n$

2 Limites et inégalités larges

Théorème 1 : Passages aux limites dans les inégalités larges

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Si :

i) $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_2$.

ii) $u_n \leq v_n$

Alors : $\quad \ell_1 \leq \ell_2$.

2 Limites et inégalités larges

Théorème 1 : Passages aux limites dans les inégalités larges

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Si :

i) $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_2$.

ii) $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang

Alors : $\ell_1 \leq \ell_2$.

2 Limites et inégalités larges

Théorème 1 : Passages aux limites dans les inégalités larges

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si :

i) $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_2$.

ii) $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq v_n$

Alors : $\quad \ell_1 \leq \ell_2$.

Théorème 1 : Passages aux limites dans les inégalités larges

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Si :

i) $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$.

ii) $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq v_n$

Alors : $\ell_1 \leq \ell_2$.

Exemple 1

Prouver que l'implication : $(\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < v_n \ ) \implies (\ell_1 < \ell_2)$
est fausse

3 Les théorèmes de comparaison

Théorème 2 : Théorème d'encadrement

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

3 Les théorèmes de comparaison

Théorème 2 : Théorème d'encadrement

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) A.P.C.R. : $u_n \leq v_n \leq w_n$

3 Les théorèmes de comparaison

à partir d'un certain rang

Théorème 2 : Théorème d'encadrement

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) A.P.C.R. : $u_n \leq v_n \leq w_n$

3 Les théorèmes de comparaison

à partir d'un certain rang

Théorème 2 : Théorème d'encadrement

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) A.P.C.R. : $u_n \leq v_n \leq w_n$

ii) u et w convergent vers une même limite ℓ

à partir d'un certain rang

Théorème 2 : Théorème d'encadrement

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) A.P.C.R. : $u_n \leq v_n \leq w_n$

ii) u et w convergent vers une même limite ℓ

Alors : $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$

3 Les théorèmes de comparaison

à partir d'un certain rang

Théorème 2 : Théorème d'encadrement

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) A.P.C.R. : $u_n \leq v_n \leq w_n$

ii) u et w convergent vers une même limite ℓ

Alors : $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$

v converge
et $\lim v_n = \ell$.

3 Les théorèmes de comparaison

Théorème 2 : Théorème d'encadrement

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) A.P.C.R. : $u_n \leq v_n \leq w_n$

ii) u et w convergent vers une même limite ℓ

Alors : $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$

v converge
et $\lim v_n = \ell$.

Théorème 3 : Théorème de majoration /minoration

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

3 Les théorèmes de comparaison

Théorème 2 : Théorème d'encadrement

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) A.P.C.R. : $u_n \leq v_n \leq w_n$

ii) u et w convergent vers une même limite ℓ

Alors : $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$

v converge
et $\lim v_n = \ell$.

Théorème 3 : Théorème de majoration /minoration

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors : $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

3 Les théorèmes de comparaison

Théorème 2 : Théorème d'encadrement

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) A.P.C.R. : $u_n \leq v_n \leq w_n$

ii) u et w convergent vers une même limite ℓ

Alors : $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$

v converge
et $\lim v_n = \ell$.

Théorème 3 : Théorème de majoration /minoration

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors : $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- Si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

3 Les théorèmes de comparaison

Théorème 2 : Théorème de majoration /minoration

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors : $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- Si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exemple 2

Etudier la limite de la suite de terme général :

a) $u_n = \dfrac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$ $(x \in \mathbb{R})$ b) $u_n = q^n$ où $q > 1$

Théorème 2 : Théorème de majoration /minoration

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors : $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- Si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exemple 3

Etudier la convergence et la limite de la suite (S_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}$.

4 Suites monotones

Théorème 3 : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u est croissante alors u possède une limite.

-
-

4 Suites monotones

Théorème 3 : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u est croissante alors u possède une limite.

- Si u est majorée, alors u converge. ▪

4 Suites monotones

Théorème 3 : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u est croissante alors u possède une limite.

- Si u est majorée, alors u converge.
- Sinon : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

4 Suites monotones

Théorème 3 : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u est croissante alors u possède une limite.

- Si u est majorée, alors u converge.
- Sinon : $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

☢ Attention ☢

Eviter : « *u est croissante, majorée par M, donc* ... ».

4 Suites monotones

Théorème 3 : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u est croissante alors u possède une limite.

- Si u est majorée, alors u converge.
- Sinon : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

☢ Attention ☢

Eviter : « *u est croissante, majorée par M, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$* ».

Théorème 3 : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u est croissante alors u possède une limite.

- Si u est majorée, alors u converge.
- Sinon : $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

☢ Attention ☢

Eviter : « *u est croissante, majorée par M, donc* $\cancel{u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} M}$ ».

$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \leq M$

Théorème 3 : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u est croissante alors u possède une limite.

- Si u est majorée, alors u converge.
- Sinon : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Attention

Eviter : « *u est croissante, majorée par M, donc* $\cancel{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M}$ ».

$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \leq M$

Exemple 4

On pose $u_0 = 1$ puis : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

5 Suites adjacentes

Définition 1

Deux suites $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, sont dites adjacentes si :

5 Suites adjacentes

Définition 1

Deux suites $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, sont dites adjacentes si :

i) L'une est croissante, l'autre décroissante.

5 Suites adjacentes

Définition 1

Deux suites $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, sont dites adjacentes si :

i) L'une est croissante, l'autre décroissante.

ii) $v_n - u_n \to 0$.

5 Suites adjacentes

Définition 1

Deux suites $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, sont dites adjacentes si :

i) L'une est croissante, l'autre décroissante.

ii) $v_n - u_n \to 0$.

Théorème 4

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u et v sont adjacentes, alors :

5 Suites adjacentes

Définition 1

Deux suites $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, sont dites adjacentes si :

i) L'une est croissante, l'autre décroissante.

ii) $v_n - u_n \to 0$.

Théorème 4

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u et v sont adjacentes, alors : elles convergent vers une même limite

5 Suites adjacentes

Définition 1

Deux suites $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, sont dites adjacentes si :

i) L'une est croissante, l'autre décroissante.

ii) $v_n - u_n \to 0$.

Théorème 4

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u et v sont adjacentes, alors : elles convergent vers une même limite

Si u croît et v décroît vers ℓ

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad u_m \leq \ell \leq v_n$$

5 Suites adjacentes

Définition 1

Deux suites $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, sont dites adjacentes si :

i) L'une est croissante, l'autre décroissante.

ii) $v_n - u_n \to 0$.

Théorème 4

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u et v sont adjacentes, alors : elles convergent vers une même limite

Si u croît et v décroît vers ℓ

$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad u_m \leq \ell \leq v_n$

Exercice 1

Démontrer le théorème

5 Suites adjacentes

Définition 1

Deux suites $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, sont dites adjacentes si :

i) L'une est croissante, l'autre décroissante.

ii) $v_n - u_n \to 0$.

Théorème 4

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u et v sont adjacentes, alors : elles convergent vers une même limite

Si u croît et v décroît vers ℓ
$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad u_m \leq \ell \leq v_n$

Exemple 5

Pour tout $n \geq 1$, on pose : $\quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad$ et $\quad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$.

Montrer que u et v ont même limite

IV Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

1 Rappels sur les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

1 Rappels sur les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Intervalle stable par f

Intervalle $I \subset D$ pour lequel $f(I) \subset I$

1 Rappels sur les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

$f : D \to \mathbb{R}$

Intervalle stable par f

Intervalle $I \subset D$ pour lequel $f(I) \subset I$

1 Rappels sur les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

$f : D \to \mathbb{R}$

Intervalle stable par f

Intervalle $I \subset D$ pour lequel $f(I) \subset I$

En pratique

Si $u_0 \in I$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes dans I.

1 Rappels sur les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

$f : D \to \mathbb{R}$

Intervalle stable par f

Intervalle $I \subset D$ pour lequel $f(I) \subset I$

En pratique

Si $u_0 \in I$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes dans I.

Théorème 1 : Critère « $f(\ell) = \ell$ »

Si (u_n) converge vers $\ell \in D$ et si f est continue en ℓ , alors ℓ est un *point fixe* de f : $\quad f(\ell) = \ell$

1 Rappels sur les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

$f : D \to \mathbb{R}$

Intervalle stable par f

Intervalle $I \subset D$ pour lequel $f(I) \subset I$

En pratique

Si $u_0 \in I$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes dans I.

Théorème 1 : Critère « $f(\ell) = \ell$ »

Si (u_n) converge vers $\ell \in D$ et si f est continue en ℓ , alors ℓ est un *point fixe* de f : $f(\ell) = \ell$

Objectif

Etudier la convergence de la suite.

2 Cas où f est croissante

Théorème 2

Soit I un intervalle stable par f et $u_0 \in I$.
Si f croissante sur I alors :

2 Cas où f est croissante

Théorème 2

Soit I un intervalle stable par f et $u_0 \in I$.
Si f croissante sur I alors : (u_n) est monotone

2 Cas où f est croissante

Théorème 2

☢ Hors programme : à savoir redémontrer ☢

Soit I un intervalle stable par f et $u_0 \in I$.
Si f croissante sur I alors : (u_n) est monotone

Exercice 1

On suppose f croissante sur I. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

2 Cas où f est croissante

Théorème 2

☢ Hors programme : à savoir redémontrer ☢

Soit I un intervalle stable par f et $u_0 \in I$.
Si f croissante sur I alors : (u_n) est monotone

Exercice 1

On suppose f croissante sur I. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

SF 11 : Etudier la limite de (u_n) lorsque f est croissante

Exemple 1

Etudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e^{u_n} - 2$$

2 Cas où f est croissante

Théorème 2

Hors programme : à savoir redémontrer

Soit I un intervalle stable par f et $u_0 \in I$.
Si f croissante sur I alors : (u_n) est monotone

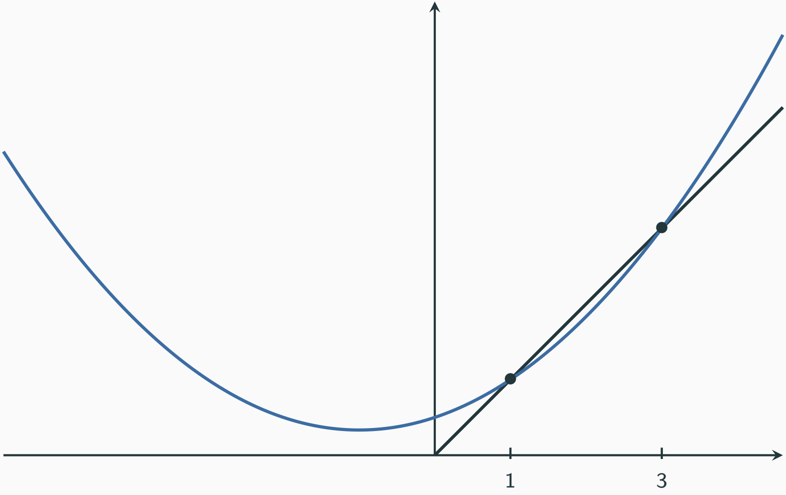
Exercice 1

On suppose f croissante sur I. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

SF 11 : Etudier la limite de (u_n) lorsque f est croissante

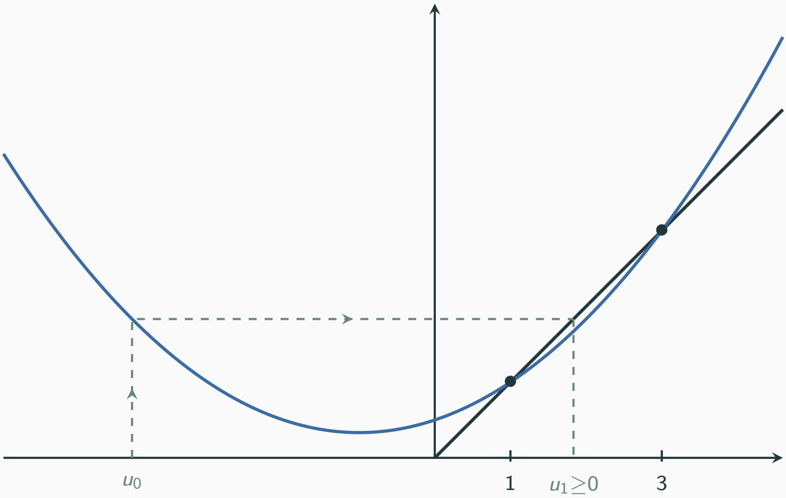
Exemple 2

1. Soit $u_0 \geq 0$. Etudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2u_n + 3}{6} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
2. Même question lorsque $u_0 < 0$.



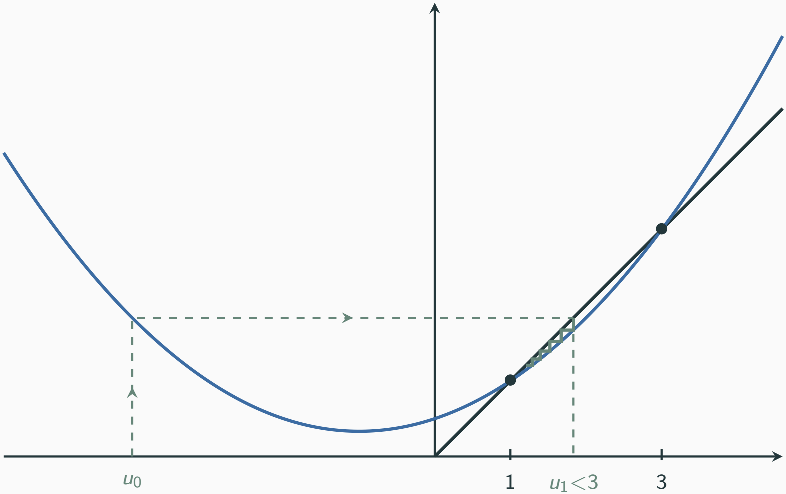
Exemple 2 : Etudier la limite de u

2. $u_0 < 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2u_n + 3}{6}$



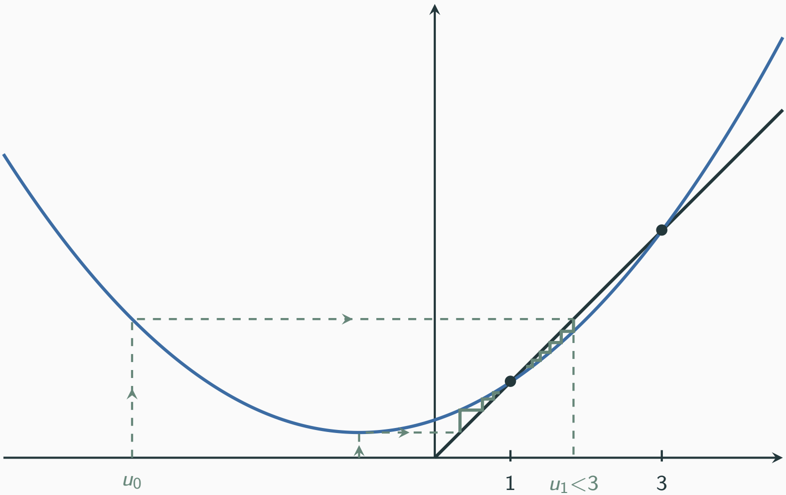
Exemple 2 : Etudier la limite de u

2. $u_0 < 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2u_n + 3}{6}$



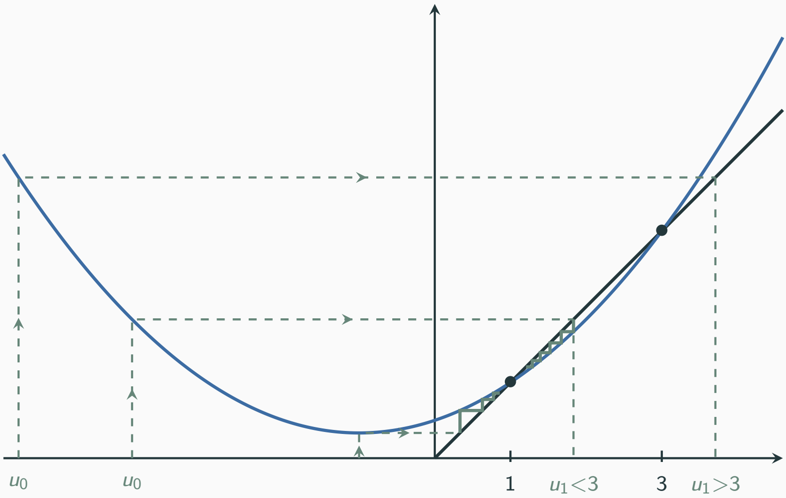
Exemple 2 : Etudier la limite de u

2. $u_0 < 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2u_n + 3}{6}$



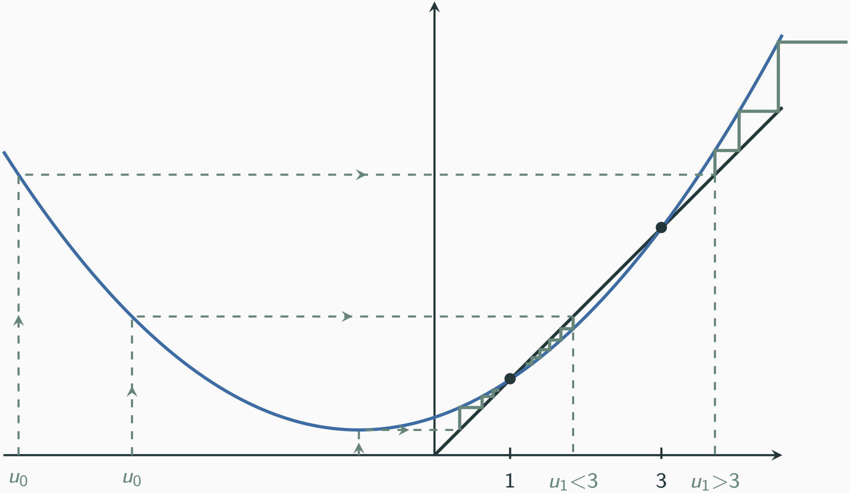
Exemple 2 : Etudier la limite de u

2. $u_0 < 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2u_n + 3}{6}$



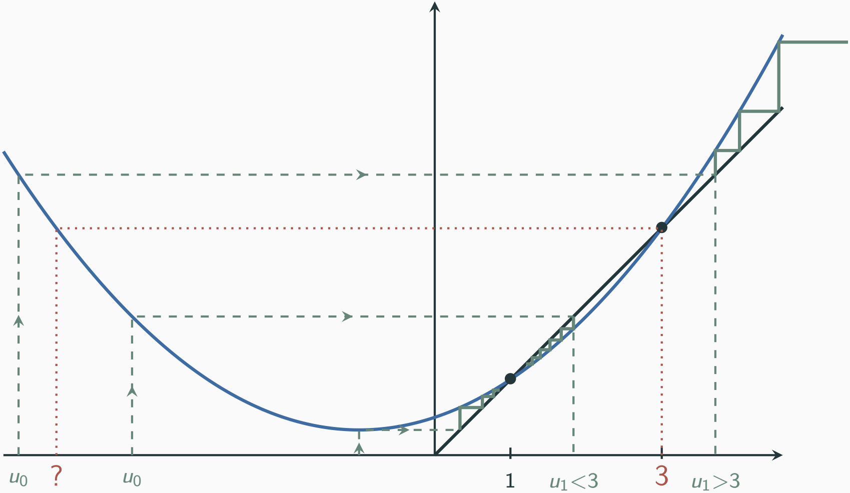
Exemple 2 : Etudier la limite de u

2. $u_0 < 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2u_n + 3}{6}$



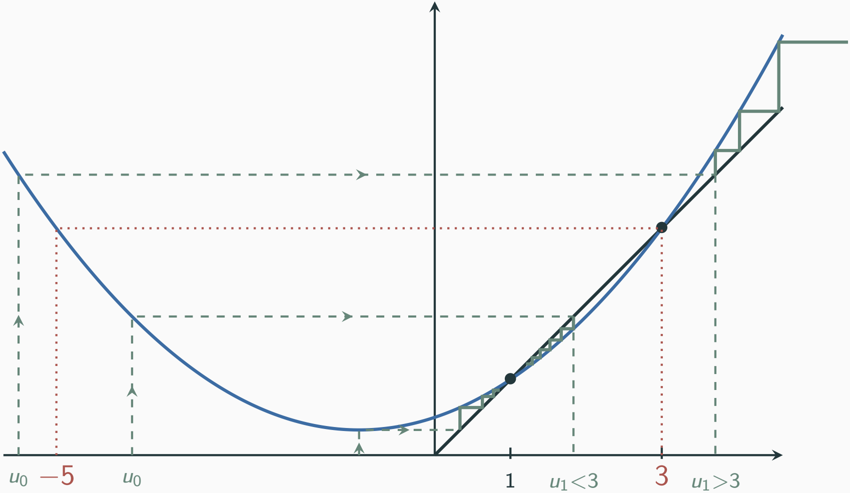
Exemple 2 : Etudier la limite de u

2. $u_0 < 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2u_n + 3}{6}$



Exemple 2 : Etudier la limite de u

2. $u_0 < 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2u_n + 3}{6}$



Exemple 2 : Etudier la limite de u

2. $u_0 < 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2u_n + 3}{6}$

3 Cas où f est décroissante

Théorème 3

Soit I un intervalle stable par f et $u_0 \in I$. Si f décroissante sur I alors :

3 Cas où f est décroissante

Théorème 3

Soit I un intervalle stable par f et $u_0 \in I$. Si f décroissante sur I alors : (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraire.

3 Cas où f est décroissante

Théorème 3

Soit I un intervalle stable par f et $u_0 \in I$. Si f décroissante sur I alors : (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraire.

Exercice 2

Montrer le théorème.

3 Cas où f est décroissante

Théorème 3

Soit I un intervalle stable par f et $u_0 \in I$. Si f décroissante sur I alors : (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraire.

Théorème 4 : Admis provisoirement

Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
Si : $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

3 Cas où f est décroissante

Théorème 3

Soit I un intervalle stable par f et $u_0 \in I$. Si f décroissante sur I alors : (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraire.

Théorème 4 : Admis provisoirement

Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
Si : $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exemple 3 : Un cas où f décroît

Etudier la limite de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$$