SF 1 — Justifier la dérivabilité de f sur un intervalle

- *Hors points à problèmes.* On combine dérivabilité des fonctions usuelles et opérations sur les fonctions dérivables (avec soin pour la composition)
- *En les points à problèmes* (en général en présence de $\sqrt{\cdot}$, Arcsin ou Arccos) :
  - On étudie la limite en a du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
  - On peut aussi utiliser le théorème de la limite de la dérivée.

SF 2 — Calculer les dérivées successives d'une fonction

- *Option 1 : conjecture puis récurrence.* On calcule $f', f'', f''', \dots$ jusqu'à conjecturer une expression pour $f^{(n)}$ que l'on justifie par récurrence.
- *Option 2 : avec Leibniz.* Dans le cas où f est un produit.
- *Option 3 : en utilisant les complexes.* Pour $x \mapsto \cos(ax)e^{bx}$ ou $x \mapsto \sin(ax)e^{bx}$

SF 3 — Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I

- *Option 1 : par opérations.*
  - *Combinaisons linéaires, produits, quotients.* « f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I comme somme (produit ...) de fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ »
  - *Compositon.* La fonction $f = v \circ u$ est de classe $\mathscr{C}^n$ si :
    - *i)* v est de classe $\mathscr{C}^n$ sur un certain intervalle J ;
    - *ii)* Sur l'intervalle I, u de classe $\mathscr{C}^n$ et à valeurs dans J ;
- *Option 2 : par récurrence.* En présence de « points à problème » (par exemple pour un prolongement par continuité), on peut procéder par récurrence en utilisant le théorème de la limite de la dérivée pour l'hérédité (voir SF 5).

SF 4 — Justifier que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $J = f(I)$

Lorsque f est bijective de I sur J, il suffit de montrer que :
i) f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. *ii)* f' NE S'ANNULE PAS SUR I

SF 5 — Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I

- On justifie que f est $\mathscr{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ par opérations.
- On étudie $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ pour prolonger f par continuité en a.
- On étudie $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$ pour appliquer le théorème de la limite de la dérivée et ainsi montrer que f est dérivable en a et que f' y est continue.

SF 6 — Montrer qu'une dérivée s'annule

On peut utiliser le théorème de Rolle

SF 7 — Montrer qu'une équation a *au moins* une solution

On peut utiliser le théorème de Rolle dès lors que l'on parvient à réécrire l'équation sous la forme $\varphi'(x) = 0$

SF 8 — Etablir un encadrement

On peut utiliser l'égalité (ou l'inégalité) des accroissements finis :
- On parvient à faire apparaître un accroissement de la forme $f(b) - f(a)$, la difficulté est de choisir a et b qui peuvent être fonction de x.
- On cherche à encadrer f' sur $]a, b[$.

SF 9 — Montrer que f est lipschitzienne sur I

On utilise l'inégalité des accroissements finis : on montre que f' est bornée sur I.

SF 10 — Montrer la convergence d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

- On montre que $f : I \to \mathbb{R}$ est k-lipschitzienne de rapport $k \in]0, 1[$.
- On montre que I est stable par f *i.e.* $f(I) \subset I$.
- On montre qu'il existe un unique $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
- On montre que $u_n \to \alpha$:
  - *Avec l'inégalité des accroissements finis.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq k|u_n - \alpha|$ *i.e.* $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$
  - *Par récurrence sur n.* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$.
  - *Théorème d'encadrement.* Puisque $k \in [0, 1[$: $k^n \to 0$ puis $|u_n - \alpha| \to 0$

Rappels sur la convexité

Caractérisations de la convexité

♥ f est convexe si pour tous $a, b \in I$: $\forall t \in [0, 1], f\big((1-t)a + tb\big) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$

Caractérisations de la convexité

♥ La fonction f est convexe sur I ssi
- f' est croissante sur I (Lorsque f est dérivable sur I)
- f'' est positive sur I (Lorsque f est deux fois dérivable sur I)
- $\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$ pour tout $a \in I$ (Sans hypothèse)

Inégalités de convexité

♥ Lorsque f est convexe sur I :
- *Inégalité des tangentes.* Si f est dérivable sur I : $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ pour tous $a, x \in I$.
- *Inégalité des cordes.* Pour tout x entre[a] a et b : $f(x) \leq f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$
- *Inégalité de Jensen.* Pour tous $a_1, \dots, a_n \in I$:
  - Pour tous $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$: $f\left(\sum_{i=1}^n t_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(a_i)$
  - En particulier : $f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(a_i)$

[a] Et f est au-dessus de la corde en dehors de $[a, b]$