2 Fonctions puissances

- **Objectif.** Etant donné $x \in \mathbb{R}_+^*$, on veut définir x^α pour $\alpha \in \mathbb{R}$ *non nécessairement entier*.

- **Remarque.** Lorsque $n \in \mathbb{N}$: $x^n =$

Définition 1

Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

Attention Lorsque α n'est pas un entier, x^α n'est pas :

Théorème 1

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

-
-
-
-
-

Exercice 1 — Démontrer les cinq propriétés du théorème.

- **Conséquence.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $(x^{1/n})^n = x$. Le réel $x^{1/n}$ est appelé :

Exercice 2 — Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que : $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

Théorème 2 : Dérivée

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $p_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée :

- **Conséquence.** Si u est une fonction dérivable et strictement positive, alors u^α est dérivable et :

Exercice 3 — Justifier la dérivabilité de p_α ainsi que l'expression de sa dérivée.

SF 1 : Dériver une expression de la forme $u(x)^{v(x)}$ (l'exposant dépend de x)

Exemple 1 — **1.** **Attention** Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto x^x$.
2. **Attention** Si $u : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, calculer la dérivée de $g : x \mapsto x^{u(x)}$.

Théorème 3 : Variations des fonctions puissances

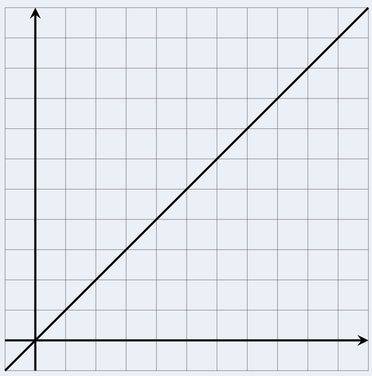
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Les variations et limites des fonctions p_α sont données par les tableaux :

Cas $\alpha > 0$

x	0	$+\infty$
$\alpha x^{\alpha-1}$		
x^α		

Cas $\alpha < 0$

x	0	$+\infty$
$\alpha x^{\alpha-1}$		
x^α		



La fonction p_α est concave si $\alpha \in [0, 1]$ et convexe sinon.

Exercice 4 *Prolongement par continuité en 0 pour $\alpha > 0$.* — Soit $\alpha > 0$. On prolonge p_α en 0 en posant $0^\alpha = 0$. Montrer que la fonction p_α ainsi prolongée est dérivable en 0 si et seulement si $\alpha \geq 1$.

Théorème 4 : croissances comparées généralisées

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$

-
-
-

Exercice 5 — Etablir la deuxième limite en utilisant : $\lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$.