Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

## Exercice de cours

**Exercice 1** *Exercice feuille 9* — Déterminer, suivant la valeur de $a \in \mathbb{C}$ l'expression des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n$

**Exercice 2** *Exercice feuille 9* — Soit $a \in ]0,1[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n}(1+a^k)$. Montrer que $(u_n)$ converge.

**Exercice 3** *Cours, chap 10, III* — Démontrer que si $u$ et $v$ sont adjacentes, alors elles convergent vers une même limite.

# 1 Vocabulaire de base

Généralités sur la notion de suite réelle, définitions liées à l'ordre.

**Théorème : Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle**

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $u$ est bornée et si $v$ converge vers 0, alors $uv$ converge vers 0.

**En pratique : montrer qu'une suite est croissante**

- On peut montrer que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Définition**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et soient $q, r \in \mathbb{C}$.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *arithmétique de raison r* si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = u_n + r$$
Le terme général est alors donné pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = u_0 + nr$.
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *géométrique de raison q* si :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = qu_n$$
Le terme général est alors donné pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = q^n u_0$.
(on a aussi $u_n = q^{n-1}u_1$)

**Théorème : Limite d'une suite géométrique**

| Soit $q \in \mathbb{R}$ | $q > 1$ | $q = 1$ | $\lvert q\rvert < 1$ | $q \leq -1$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ | $+\infty$ | 1 | 0 | Pas de limite |

# 2 Suites particulières

## 2.1 Suites arithmético-géométriques

**Définition**

Une suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *arithmético-géométrique* s'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = au_n + b$$

**Calculer le terme général d'une suite arithmético-géométrique**

1. On introduit l'unique $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$.
2. La suite $v$ de terme général $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison $a$.
3. *En calculant* $\alpha$, on en déduit une expression de $u_n = v_n + \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

## 2.2 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre deux

- Etant donné $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, avec $b \neq 0$, on considère une suite $(u_n)$ vérifiant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
- On appelle *équation caractéristique* de la suite l'équation du second degré d'inconnue $\lambda \in \mathbb{C}$ : $(\mathscr{C}) \quad \lambda^2 - a\lambda - b = 0$

**Théorème : Expression du terme général $u_n$ en fonction de $n$**

- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

| Discriminant $\Delta$ de $(\mathscr{C})$ | Racines de $(\mathscr{C})$ | Il existe $A, B \in \mathbb{C}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : |
|---|---|---|
| $\Delta \neq 0$ | $\lambda_1$ et $\lambda_2$ | $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$ |
| $\Delta = 0$ | $\lambda_0$ | $u_n = (A + Bn)\lambda_0^n$ |

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

| Discriminant $\Delta$ de $(\mathscr{C})$ | Racines de $(\mathscr{C})$ | Il existe $A, B \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : |
|---|---|---|
| $\Delta > 0$ | $\lambda_1$ et $\lambda_2$ | $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$ |
| $\Delta = 0$ | $\lambda_0$ | $u_n = (A + Bn)\lambda_0^n$ |
| $\Delta < 0$ | $re^{\pm i\theta}$ | $u_n = r^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$ |

# 3 Existence et/ou calcul de limites

## 3.1 Opérations sur les limites

Lorsque $u$ et $v$ ont des limites (finies ou non), on peut souvent conclure quant à l'existence et la valeur de $\lim(u_n+v_n)$, $\lim(u_nv_n)$ et $\lim(\frac{u_n}{v_n})$ (voir les tableaux)

## 3.2 Limites et inégalités larges

**Théorème : Passages aux limites dans les inégalités larges**

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que :
*i)* $u$ et $v$ possèdent des limites finies. *ii)* A partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.
Alors : $\lim u_n \leq \lim v_n$.

**Attention** L'implication : $(\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n < v_n) \Longrightarrow (\ell_1 < \ell_2)$ est fausse.

## 3.3 Les théorèmes de comparaison

**Théorème : Théorème d'encadrement**

Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que :
*i)* $u$ et $w$ convergent vers une même limite $\ell$ ;
*ii)* à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ ;
alors $v$ converge et $\lim v_n = \ell$.

- **Remarque.** Théorème « 2 en 1 » qui fournit : 1. l'existence de la limite 2. sa valeur.

**Théorème : Théorème de majoration /minoration**

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.
- Si $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$. • Si $v_n \to -\infty$, alors $u_n \to -\infty$.

## 3.4 Suites monotones

**Théorème : Théorème de la limite monotone**

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite croissante alors $u$ possède une limite. Plus précisément :
- Si $u$ est majorée, alors $u$ converge. • Si $u$ n'est pas majorée : $u_n \to +\infty$.

- **N.B.** Théorème jumeau pour les suites décroissantes, minorées ou non.

## 3.5 Suites adjacentes

**Définition**

Deux suites $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, sont dites *adjacentes* si :
1. L'une est croissante, l'autre décroissante. 2. $v_n - u_n \to 0$.

**Théorème**

Si $u$ et $v$ sont adjacentes, alors elles convergent vers une même limite.

# 4 Notions sur les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

- **Cadre.** • $f : D \to \mathbb{R}$ est monotone • On étudie une suite $u$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = f(u_n)$

## 4.1 Rappels

- **Intervalle stable par $f$.** Un intervalle $I \subset D$ est *stable* par $f$ si $f(I) \subset I$ *i.e.* $f(x) \in x$ pour tout $x \in I$.
- **En pratique.** Si $I$ est stable par $f$ et si $u_0 \in I$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes dans $I$.

**Théorème : Critère « $f(\ell) = \ell$ »**

Si $(u_n)$ converge vers $\ell \in D$, et si $\boxed{f \text{ est continue en } \ell}$, alors $\ell$ est un *point fixe* de $f$

**Attention** Ce théorème ne prouve jamais la convergence de la suite

## 4.2 Cas où $f$ est croissante

**Théorème**

Soit $I$ un intervalle stable par $f$ et $u_0 \in I$. Si $f$ croissante sur $I$ alors $u$ est monotone

**Cas où $f$ est croissante**

- *Etudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$.*
  - Les zéros de $g$ sont les points fixes de $f$ (candidats limites si $f$ est continue)
- *Etudier la limite de $(u_n)$ lorsque $f$ est croissante.* On montre que :
  1. $(u_n)$ est à termes dans un intervalle où $g$ est de signe constant
  2. $(u_n)$ est monotone (croissante ou décroissante selon le signe de $g$).
  3. $(u_n)$ a une limite (avec le théorème de la limite monotone)

## 4.3 Cas où $f$ est décroissante

**Théorème**

Soit $I$ un intervalle stable par $f$ et $u_0 \in I$. Si $f$ décroissante sur $I$ alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraire.