Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

Exercices de cours

Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève pris en défaut de connaissance sur un des exercices de cours.

Exercice 1 — Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$
1. *Cours, chap 9–II*. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
2. *Exercice feuille 8*. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 2 — Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$
1. *Cours, chap 9–II*. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
2. *Exercice feuille 8*. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Exercice 3 *Ex. de cours, chap 9–III* — On note f l'application $z \mapsto z^2$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
1. On note Δ la droite d'équation $y = x$. Montrer que $f(\Delta) = i\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}_-^*) = i\mathbb{R}^*$.

1 Injections, surjections, bijections

- **Cadre.** E et F sont deux ensembles.

1.1 Les définitions

- **Définitions.** Notion d'application de E dans F, définition de l'image d'un élément de E, d'un antécédent d'un élément de F par une application.
- **En pratique.** Si $y \in F$ est donné, trouver les antécédents de y revient à résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.

Définition

Une application $f : E \to F$ est dite :
- *Injective* si tout élément de F a *au plus* un antécédent par f.
- *Surjective* si tout élément de F *au moins* un antécédent par f.
- *Bijective* si tout élément de F a *exactement* un antécédent par f.
  Donc f est bijective si et seulement si f est injective et surjective.

1.2 Prouver l'injectivité en pratique

En pratique : pour montrer que f est injective

- f est injective ssi pour tous $x, x' \in E$: $\boxed{f(x) = f(x') \implies x = x'}$.
- **Rédaction type.** « Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$ ...... donc $x = x'$. »

Théorème : Cas des fonctions réelles strictement monotones

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$.
Si f est strictement monotone sur D, alors f est injective.

1.3 Prouver la surjectivité en pratique

Rédaction : pour montrer que f est surjective

« Soit $y \in F$ » ... *(on construit $x \in E$ tel que $f(x) = y$.)*

2 Composition, réciproque

2.1 Composition des applications

Définition

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. La composée de f et g est l'application $g \circ f : E \to G$ définie pour tout $x \in E$ par : $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$

Théorème : Associativité

Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Définition

L'*identité de E* est l'application $\mathrm{Id}_E : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E. \\ x & \longmapsto & x \end{array}$

Pour toute fonction $f : E \to F$: • $\mathrm{Id}_F \circ f = f$ • $f \circ \mathrm{Id}_E = f$.

Théorème

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

2.2 Réciproque d'une bijection

Définition

Soit $f : E \to F$ une application **bijective**. L'application *réciproque* de f est l'application $f^{-1} : F \to E$ qui, à tout élément de F, associe **son** antécédent par f :

- Etant donné $y \in F$, $f^{-1}(y)$ est l'unique $x \in E$ solution de l'équation : $f(x) = y$.
- Pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$: $\quad f(x) = y \underset{\text{def}}{\iff} x = f^{-1}(y)$

Théorème

Lorsque $f : E \to F$ est bijective, $\quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E \quad$ et $\quad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$

Théorème

Soit $f : E \to F$ une application *a priori* quelconque.
On suppose qu'il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
Alors f est bijective et $g = f^{-1}$

En pratique : Trois méthodes pour montrer que $f : E \to F$ est bijective

1. On trouve (connaît) $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
2. On fixe $y \in F$ et on montre que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ possède une unique solution.
3. On prouve que f est injective et surjective

Théorème : Réciproque d'une composée

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives.
Alors $g \circ f$ est bijective et : $\quad (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

3 Action de f sur les sous-ensembles de E et F

3.1 Images directes, images réciproques

Définition

Soit $A \subset E$ et $f : E \to F$. L'*image (directe)* de A par f est l'ensemble, noté $f(A)$, des images par f des éléments de A : $\quad f(A) \underset{\text{déf.}}{=} \{f(x)\,,\ x \in A\}$.

- **Retenir.** $y \in f(A)$ signifie : $\boxed{\text{il existe } x \in A \text{ tel que } f(x) = y}$

Cas d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Penser à utiliser le tableau de variation de f.

Définition

Soit $B \subset F$ et $f : E \to F$. L'*image réciproque* de B par f est l'ensemble, noté $f^{-1}(B)$, des antécédents par f des éléments de B : $\quad f^{-1}(B) \underset{\text{déf.}}{=} \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

- **Retenir.** $x \in f^{-1}(B)$ signifie $\boxed{f(x) \in B}$

Attention $f^{-1}(B)$ est défini même si f n'est pas bijective (l'écriture « $f^{-1}(B)$ » est un bloc défini sans utiliser f^{-1}).

Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

- Chercher $f^{-1}(\{y\})$ revient à résoudre l'équation $f(x) = y$.
- Chercher $f^{-1}([a, b])$ revient à résoudre l'inéquation $a \leq f(x) \leq b$.

3.2 Prolongement, restriction d'une application

Définition

Soient A une partie de E et $f : E \to F$. On appelle restriction de f à A l'application $f_{|A} : A \to F$ définie pour tout $x \in A$ par : $\quad f_{|A}(x) = f(x)$

Définition

Soient A une partie de E et $f : A \to F$. **Un** prolongement de f à E est une application $\widetilde{f} : E \to F$ telle que pour tout $x \in A$: $\quad \widetilde{f}(x) = f(x)$

4 Relations binaires sur un ensemble E

Définition

Une *relation binaire* $\mathscr{R}$ sur E est une partie de $E \times E$.

- **Interprétation.** Une relation binaire sur E est une propriété $\mathscr{R}$ qui s'applique aux couples d'éléments de E. Etant donné $(x, y) \in E \times E$, lorsque (x, y) vérifie $\mathscr{R}$, on écrit $x\mathscr{R}y$

4.1 Relations d'ordre

Définition

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre si $\mathscr{R}$ est :
- *Réflexive* : $\forall x \in E, \quad x\mathscr{R}x.$
- *Antisymétrique* : $\forall x, y \in E, \quad (x\mathscr{R}y \quad \text{et} \quad y\mathscr{R}x) \implies x = y.$
- *Transitive* : $\forall x, y, z \in E, \quad (x\mathscr{R}y \quad \text{et} \quad y\mathscr{R}z) \implies x\mathscr{R}z$

Définition

Une relation d'ordre $\lhd$ sur E est dite :
- *Totale* si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables *i.e.* :
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (x \lhd y \quad \text{ou} \quad y \lhd x)$$
- *Partielle* si elle n'est pas totale *i.e.* si :
$$\exists (x, y) \in E \times E \mid (x \ntriangleleft y \quad \text{et} \quad y \ntriangleleft x)$$

Définition

Soit $\lhd$ une relation d'ordre sur E et $A \in \mathscr{P}(E)$.
- On dit que A est *majorée* (pour $\lhd$) si il existe $M \in E$ tel que :
$$\forall a \in A, \; a \lhd M$$
- On appelle *plus grand élément* de A (pour $\lhd$) tout majorant de A appartenant à A

- **Remarque.** Si A possède un plus grand élément pour une relation d'ordre $\lhd$, alors il est unique.

4.2 Relations d'équivalence

Définition

On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence si $\mathscr{R}$ est :
- *Réflexive* : $\forall x \in E, \quad x\mathscr{R}x.$
- *Symétrique* si : $\forall x, y \in E, \quad x\mathscr{R}y \implies y\mathscr{R}x.$
- *Transitive* : $\forall x, y, z \in E, \quad (x\mathscr{R}y \quad \text{et} \quad y\mathscr{R}z) \implies x\mathscr{R}z$

Théorème

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E.
- Pour tout $x \in E$, la classe d'équivalence de x (pour $\mathscr{R}$) est l'ensemble des éléments en relation avec x à savoir : $\mathrm{cl}(x) \underset{\text{déf.}}{=} \{y \in E \mid x\mathscr{R}y\}$
- Ces classes d'équivalence forment une *partition* de E :
  - Aucune n'est vide
  - Leur réunion est E.
  - Deux classes distinctes sont disjointes.

L'adresse de la page des maths est : `https://mathieucathala.fr`