Exercice de cours sur 8 points

L'un des exercices de la liste fournie.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES

1 Equations du premier ordre

• **Cadre.** • $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. • I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1.1 Généralités

On étudie l'équation : $(E)\quad y' + a(t)y = b(t)$ où :
- l'inconnue est une fonction $y : I \to \mathbb{K}$, dérivable.
- $a, b : I \to \mathbb{K}$ sont deux fonctions continues fixées (b est le second membre)

1.2 Equation homogène

• **Cadre.** • On cherche à résoudre (E_0) $y' + a(t)y = 0$ • A est une primitive de a sur I

Théorème

Les solutions de (E_0) sont toutes les fonctions de la forme $t \mapsto Ce^{-A(t)}$ où $C \in \mathbb{K}$ est une constante quelconque.

1.3 Equations avec second membre

Structure de l'ensemble des solutions

• **Cadre.** On suppose avoir trouvé *une solution particulière* y_1 de (E).

Théorème : Structure de l'ensemble des solutions

Les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme $y_1 + y_0$ où y_0 est une solution quelconque de (E_0).
« $\boxed{\text{LES}}$ solutions de (E) = $\boxed{\text{UNE}}$ solution particulière + $\boxed{\text{LES}}$ solutions de (E_0) »

Méthode générale de résolution par variation de la constante.

En pratique : résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1

1. **Résolution de l'équation homogène.** Les solutions sont toutes les fonctions de la forme $\boxed{y_0 : t \mapsto Ce^{-A(t)}}$ où $C \in \mathbb{K}$ et où $\boxed{A \text{ est une primitive de } a.}$
2. **Variation de la constante.** On cherche *une* solution particulière y_1 sous la forme $\boxed{y_1 : t \mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}}$ y_1 est solution pourvu que $\boxed{\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}}$ pour tout $t \in I$
3. **Conclusion.** Les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $\boxed{y_0 + y_1}$ où y_0 est une solution quelconque de (E_0)

Solutions particulières simples

A l'étape 2, la méthode de la variation de la constante est un moyen général pour trouver une solution particulière. Dans certains cas, on peut procéder autrement :

a) *Solution « évidente ».*

b) *Si a et b sont des fonctions constantes.* La fonction constante $y_1 = -\dfrac{b}{a}$ est solution

c) *Principe de superposition.* Lorsque le second membre est de la forme $b_1(t) + b_2(t)$, une solution particulière est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre $b_1(t)$ et d'une solution particulière de l'équation avec second membre $b_2(t)$.

Conditions initiales.

Théorème

Pour tout $(t_0, \alpha) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) & \text{sur } I \\ y(t_0) = \alpha. \end{cases}$$

1.4 Application classique : une équation fonctionnelle

L'exercice classique suivant a été traité en cours et est à savoir refaire :

Exercice 1 — Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables, vérifiant :

$$\forall x, t \in \mathbb{R},\ f(x+t) = f(x)f(t)$$

2 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

2.1 Généralités

On étudie ici les équations de la forme : $(E) \quad y'' + ay' + by = s(t),$ où :

- L'inconnue est une fonction deux fois dérivable $y : I \to \mathbb{K}$
- $a, b \in \mathbb{K}$ sont des constantes.
- $s : I \to K$ est une fonction continue (le second membre).

■ **Résultats généraux.** analogues à ceux sur le premier ordre :

- Un théorème de structure assurant que si l'on dispose d'une solution particulière y_1 de (E), alors les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme $y_1 + y_0$ où y_0 est une solution quelconque de (E_0).
- Un principe de superposition des solutions.
- Un théorème sur les conditions initiales assurant qu'étant donnés $t_0 \in I$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$y'' + ay' + by = s(t) \qquad \text{avec} \quad y(t_0) = \alpha \quad \text{et} \quad y'(t_0) = \beta$$

■ **Equation caractéristique**

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$ est solution de (E_0) ssi λ vérifie $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

Définition

L'équation du second degré $(\mathscr{C}) : \lambda^2 + a\lambda + b = 0$ est *l'équation caractéristique*.

2.2 Equation homogène

On cherche à résoudre : $(E_0) \quad y'' + ay' + by = 0.$

Théorème : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Discriminant Δ de $(\mathscr{C})$	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2	$t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0	$t \mapsto (A + Bt)e^{\lambda_0 t}$

Théorème : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Discriminant Δ de $(\mathscr{C})$	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2	$t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0	$t \mapsto (A + Bt)e^{\lambda_0 t}$
$\Delta < 0$	$\alpha \pm i\beta$	$y : t \mapsto e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$

2.3 Equations avec second membre exponentiel

On étudie ici l'équation : $(E) \quad y'' + ay' + by = s(t).$

On associe à (E) l'équation homogène : $(E_0) \quad y'' + ay' + by = 0.$

En pratique : trouver une solution particulière de $y'' + ay' + by = Ke^{mt}$

1. On regarde si m est solution de l'équation caractéristique

$(\mathscr{C})$ a deux racines $\lambda_1 \neq \lambda_2$

- $m \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$: $t \mapsto Cte^{mt}$
- $m \notin \{\lambda_1, \lambda_2\}$: $t \mapsto Ce^{mt}$

$(\mathscr{C})$ a une racine double λ_0

- $m \neq \lambda_0$: $t \mapsto Ce^{mt}$
- $m = \lambda_0$: $t \mapsto Ct^2e^{mt}$

2. On cherche une solution y_1 de la forme : (voir ci-dessus)

Attention C est à trouver explicitement (en testant y_1 dans l'équation)

Cas où $f(t) = K\cos\omega t$ ou $K\sin\omega t$

1. On cherche une solution particulière pour le second membre $s(t) = Ke^{i\omega t}$
2. On prend la partie réelle ou la partie imaginaire de la solution obtenue.

2.4 Application classique : une (autre) équation fonctionnelle

L'exercice classique suivant a été traité en cours et est à savoir refaire :

Exercice 2 — Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad f'(x) = f(\pi - x).$