Cette feuille est composée d'exercices ou résultats de cours qui ont tous été corrigés ou démontrés en classe.
La colle débutera par la présentation d'un de ces exercices, celui-ci sera noté sur 8 points.
Plus que de simplement savoir les résoudre, le but est d'être capable d'en exposer clairement la solution à quelqu'un : suivant les cas, cela peut par exemple impliquer de savoir synthétiser les idées principales, de préciser quels résultats du cours sont mis en jeu, d'effectuer efficacement les calculs ...

Partie entière

Exercice 1 *Exercice feuille 0* — Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Rappels sur l'étude de fonctions, convexité

Exercice 2 *Théorème et exemple de cours, chap 0 (II)* —
1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que f' est croissante sur I. Montrer que pour tous $a, x \in I$: $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$. Interpréter graphiquement cette inégalité.
2. Etablir : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x$.

Exercice 3 *Exemple de cours, chap. 1 (I)* — Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x) - f(y) = (x-y) f'\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Exercice 4 *Théorème de cours, chap 1 (II)* — Montrer que si f est convexe sur un intervalle I alors pour tout $a \in I$, la fonction $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$ *(On ne demande pas ici de démontrer l'implication réciproque)*

Exercice 5 *Théorème de cours, chap 1 (II) (démontré dans la partie II du chap 2)* — Enoncer et démontrer l'inégalité de Jensen.

Fonctions trigonométriques

Exercice 6 *Résultat de cours, chap. 1 (III)* —
1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a,b) \neq (0,0)$.
   Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, \ a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2+b^2} \cos(t - \varphi)$.
2. Résoudre l'équation $\cos x + \sin x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 *Exemple de cours, chap. 0 (III)* — Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $|\sin nx| \leq n |\sin x|$.

Exercice 8 *Ex. de cours, chap.3 (II.3)* — Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos kx$.

Autour de la formule du binôme

Exercice 9 *Résultat de cours, chap. 2 (III)* — Enoncer et démontrer la formule du binôme de Newton dans $\mathbb{C}$.

Exercice 10 *Exercice feuille 2* — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $A_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

Nombres complexes

Exercice 11 *Exercice feuille 3* — Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 2.
1. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, déterminer le module de $z^k - 1$.
2. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 12 *Exercice de cours chap 3, III* — Soient $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$.
Montrer que $\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ avec égalité ssi $z_1, \ldots, z_n$ ont même argument.

Exercice 13 *Résultats de cours, chap 5, I.1* — Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.
1. Démontrer le théorème donnant la liste des racines de l'unité. Placer ces racines sur le cercle trigonométrique dans le cas où $n = 3$ et dans le cas où $n = 4$.
2. Combien vaut la somme des racines n-ièmes de l'unité ? Démontrer ce résultat.

Exercice 14 *Exercice de cours, chap. 5 (I.1)* — Soit $n \in \mathbb{N}^*$
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$.
2. Montrer que les solutions sont réelles et les exprimer simplement à l'aide des fonctions cosinus et sinus.

Exercice 15 *Exercice feuille 3* — Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$

Exponentielle, logarithme, puissances

Exercice 16 *Exercice feuille 4* — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de α, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $e^x = x^\alpha$.

Exercice 17 *Exercice feuille 4* — Montrer que pour tout $x \in]0,1[$: $x^x (1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

Fonctions hyperboliques

Exercice 18 *Exercice feuille 4* — Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\operatorname{th} x < x < \operatorname{sh} x$.

Exercice 19 *Ex. 16, feuille 4* —
1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que : $\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch} \frac{x}{2^k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\operatorname{sh} x}{x}$

Fonctions circulaires réciproques

Exercice 20 *Résultats de cours, chap. 4 (IV)* —

1. Rappeler l'expression de la dérivée de Arcsin sur $]-1,1[$.
2. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$: $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$
3. Démontrer la formule de la question 1.

Exercice 21 *Résultat de cours, chap. 4 IV.2* —
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Exercice 22 *Exemple de cours, Chap 4, IV.2* —
Résoudre l'équation d'inconnue x : $\qquad \operatorname{Arctan} 2x + \operatorname{Arctan} 3x = \frac{\pi}{4}$.

Primitives et équations différentielles

Exercice 23 *Exemple de cours, Chap 7, II.4* — Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad f'(x) = f(\pi - x)$.

Applications

Exercice 24 — Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$

1. *Cours, chap 9–II* Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
2. *Cours, chap 9–II* Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.