Exercices de cours

Aucun mais les techniques de calcul des parties 2 et 3 doivent être parfaitement maîtrisées

1 Primitives et intégrales

Dans toute la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Primitives

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. Une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f (sur I) si :

- F est dérivable (sur I).
- $F' = f$.

Théorème

Si f admet une primitive F_0 sur I, alors toutes les primitives de f sont les fonctions de la forme $F_0 + k$, où $k \in \mathbb{K}$ est une constante quelconque.

Théorème

On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ admet une primitive F.

- Pour tout $b \in \mathbb{R}$, une primitive $x \mapsto f(x+b)$ est $x \mapsto F(x+b)$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, une primitive de $x \mapsto f(ax)$ est $x \mapsto \dfrac{1}{a}F(ax)$.

1.2 Lien avec les intégrales

Théorème : Admis (pour l'instant)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et soit $a \in I$.

La fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur I.

Plus précisément Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, continue et soit F une primitive de f.

Pour tous $a, b \in I$: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \underset{\text{not.}}{=} [F(t)]_a^b$

2 Méthodes directes pour le calcul de primitives

2.1 Primitives de référence : à connaître sur le bout des doigts.

Primitives des fonctions usuelles

fonction	Une Primitive	Intervalle
a ($a \in \mathbb{R}$)	ax	$x \in \mathbb{R}$
x^α ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$x \in \mathbb{R}_+^*$ (au minimum)
En particulier :		
avec $\alpha = -2$: $\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$	$x \in \mathbb{R}_+^*$ ou $x \in \mathbb{R}_-^*$
avec $\alpha = -\frac{1}{2}$: $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$x \in \mathbb{R}_+^*$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$x \in \mathbb{R}_+^*$ ou $x \in \mathbb{R}_-^*$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$x\ln x - x$	$x \in \mathbb{R}_+^*$
$\cos x$	$\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$x \in \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctan} x$	$x \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$x \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x$	$x \in]-1, 1[$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$	$\ln(\operatorname{ch} x)$	$x \in \mathbb{R}$

Primitives des fonctions composées usuelles		
fonction : $u' \times (f \circ u)$	Une primitive : $F \circ u$	condition sur u
$u'u^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$u > 0$ (au minimum)
avec $\alpha = -2$: $\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	u ne s'annulant pas
avec $\alpha = \frac{1}{2}$: $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	u strictement positive
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	u ne s'annulant pas
$u'e^u$	e^u	–
$u' \cos u$	$\sin u$	–
$u' \sin u$	$-\cos u$	–
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{Arctan} u$	–
$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\operatorname{Arcsin} u$	$\|u\| < 1$

2.2 Linéarisation d'expressions trigonométriques

Primitives de $t \mapsto \cos^p t \sin^q t$, où $p, q \in \mathbb{N}$

La linéarisation est une méthode générale pour calculer ce type de primitives

2.3 Utilisation des complexes

Primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos bx$ et $x \mapsto e^{ax} \sin bx$

On utilise les nombres complexes, par exemple pour $x \mapsto e^{ax} \cos bx$

- On écrit $e^{ax} \cos bx = \operatorname{Re}(e^{(a+ib)x})$;
- Une primitive de $x \mapsto e^{(a+ib)x}$ est $x \mapsto \dfrac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}$;
- On calcule la partie réelle de cette dernière primitive.

2.4 Primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

- **Principe.** Cela dépend du nombre de racines réelles du trinôme ax^2+bx+c.

Le trinôme à deux racines réelles distinctes ($b^2 - 4ac > 0$)

En factorisant, on est ramené à primitiver $x \mapsto \dfrac{1}{a(x-r_1)(x-r_2)}$

- On trouve $A, B \in \mathbb{K}$ telles que pour tout $x \in I$: $\dfrac{1}{(x-r_1)(x-r_2)} = \dfrac{A}{x-r_1} + \dfrac{B}{x-r_2}$.
- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x-r_i}$ est $x \mapsto \ln|x-r_i|$ (pour $i = 1$ ou 2).

Le trinôme à une racine double ($b^2 - 4ac = 0$)

En factorisant, on est ramené à primitiver $x \mapsto \dfrac{1}{a(x-r)^2}$:

- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x-r)^2}$ est $x \mapsto \dfrac{-1}{x-r}$

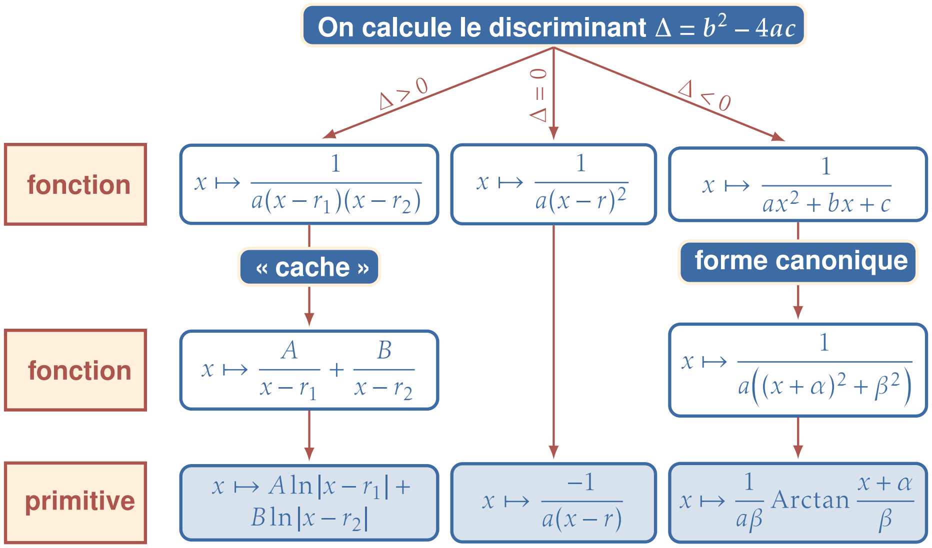
Le trinôme n'a pas de racine réelle ($b^2 - 4ac < 0$)

Théorème

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{a} \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{a}$

En pratique

1. On écrit ax^2+bx+c sous forme canonique $ax^2+bx+c = a[(x+\alpha)^2+\beta^2)]$
2. On utilise le fait que $x \mapsto \dfrac{1}{(x+\alpha)^2+\beta^2}$ est la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{\beta} \operatorname{Arctan} \dfrac{x+\alpha}{\beta}$



3 Techniques d'intégration

Définition

Une fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si elle est dérivable sur I et si la fonction f' est continue sur I.

3.1 Intégration par parties

Théorème

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

3.2 Changement de variable

Théorème

Soit f une fonction continue sur I et soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, à valeurs dans I. $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$

Utilisation « de gauche à droite »

Utilisation du type : « Calculer $I = \displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ en posant $x = \varphi(t)$ »

- On calcule $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$ et $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ puis on isole $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ dans l'intégrale.
- On effectue trois remplacements :
  1. on remplace $f(\varphi(t))$ par $f(x)$;
  2. on remplace $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ par $\mathrm{d}x$;
  3. on remplace les bornes a et b en *calculant* leurs images $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.

Utilisation « de droite à gauche »

Utilisation du type : « Calculer $I = \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ en posant $x = \varphi(t)$ ».

- On calcule $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$ et $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$
- On effectue trois remplacements :
  1. on remplace $f(x)$ par $f(\varphi(t))$;
  2. on remplace $\mathrm{d}x$ par $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$;
  3. on remplace les bornes α et β en *cherchant* a et b tels que $\varphi(a) = \alpha$ et $\varphi(b) = \beta$.

L'adresse de la page des maths est : `https://mathieucathala.fr`