Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

Exercices de cours

Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève pris en défaut de connaissance sur un des exercices de cours.

Exercice 1 *Résultats de cours, chap. 4 IV.1* —
1. Rappeler l'expression de la dérivée de Arcsin sur $]-1,1[$.
2. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$: $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$
3. Démontrer la formule de la question 1.

Exercice 2 *Résultat de cours, chap. 4 IV.2* — Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x>0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Exercice 3 *Exemple de cours, Chap 4, IV.2* —
Résoudre l'équation $\quad \operatorname{Arctan} 2x + \operatorname{Arctan} 3x = \dfrac{\pi}{4} \quad$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 *Exercice de la feuille 3* — Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
1. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, déterminer le module de $z^k - 1$.
2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 5 *Exercice de cours, chap. 5 (I.2)* — Soit $n \in \mathbb{N}^*$
1. Résoudre l'équation : $\quad (z+i)^n = (z-i)^n \quad$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
2. Montrer que les solutions sont réelles et les exprimer simplement à l'aide des fonctions cosinus et sinus.

FONCTIONS USUELLES

1 Fonction exponentielle, logarithme et puissances

1.1 Rappels sur l'exponentielle et le logarithme

• Rappels des propriétés des fonctions exp et ln :
dérivées, monotonie, valeurs remarquables, limites, variations, graphes.

1.2 Fonctions puissances

Définition

Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $x^\alpha \underset{\text{déf.}}{=} e^{\alpha \ln x}$.

Attention Lorsque $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, x^α n'est pas « $\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{\text{“}\alpha\text{ fois”}}$ »

Théorème

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$
- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
- $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$
- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
- $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$

Théorème : Dérivée

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $p_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$

- **Remarques:**
  - Si u est une fonction dérivable et strictement positive, alors $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}$.
  - **Attention** Eviter de calculer les dérivées de fonctions du type $x \mapsto x^x$ ou $x \mapsto x^{u(x)}$ en inventant une formule (fausse).

Théorème : Variations des fonctions puissances

A connaître :
- Les variations et limites des fonctions p_α(selon le signe de α).
- Les graphes des fonctions puissances : selon que $\alpha < 0$, $0 < \alpha < 1$ ou $\alpha > 1$.
- La fonction p_α est concave si $\alpha \in [0,1]$ et convexe sinon.

Théorème : croissances comparées

Pour tout $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$:

$\boxed{\dfrac{e^x}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$ $\quad \boxed{|x|^\alpha e^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0}$ $\quad \boxed{\dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$ $\quad \boxed{x^\alpha |\ln x|^\beta \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0}$

2 Fonctions hyperboliques

2.1 Cosinus et sinus hyperboliques

Définition

Les fonctions *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Théorème : Propriétés des fonctions sh et ch

1. La fonction ch est paire, la fonction sh est impaire.
2. Les fonctions sh et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et : $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ et $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$.
3. $\operatorname{ch} x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\operatorname{sh} x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
4. Leurs variations sont à connaître, de même que leurs graphes.

- **Remarque.** $\operatorname{ch} x \geq 1$ pour tout réel x et $\operatorname{ch} x = 1$ ssi $x = 0$.

Théorème

Pour tout réel x : $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

2.2 Tangente hyperbolique

Définition

La fonction *tangente hyperbolique* est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\operatorname{th} = \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

Théorème : Propriétés de th

1. La fonction th est impaire.
2. La fonction th est dérivable et : $\operatorname{th}' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2$.
3. $\operatorname{th} x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\operatorname{th} x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1$.
4. Ses variations sont à connaître, ainsi que son graphe.

3 Fonction réciproque d'une bijection

- **Cadre.** • I, J sont des intervalles • $f : I \to J$ est définie sur I et à valeurs dans J.

3.1 Notions de bijection et de fonction réciproque

Définition

On dit que f est *bijective de I sur J* ou que f est *une bijection de I sur J* si tout $y \in J$ possède un unique antécédent par f.
Dans ce cas, on note f^{-1} la fonction qui à $y \in J$ associe l'antécédent de y par f.
La fonction f^{-1} s'appelle la fonction réciproque de f.

- **Graphiquement.** Les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

3.2 Théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone

- **Cadre.** On suppose ici que $I = [a, b[$ avec $a < b$ (et éventuellement $b = +\infty$)

Théorème : TVI strictement monotone

Si : *i)* f est continue sur l'intervalle $I = [a, b[$ (b fini ou non).
ii) f est strictement croissante sur I
iii) Aux bornes : $f(a) = \alpha$ et $f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} \ell$ (finie ou non)
Alors f est bijective de $[a, b[$ sur $[\alpha, \ell[$.

• Enoncés analogues avec f strictement décroissante et/ou $I =]a, b]$, $]a, b[$ ou $[a, b]$

3.3 Calcul de f^{-1}

En pratique, on fixe $y \in J$ et on résout l'équation : $f(x) = y$ d'inconnue $x \in I$.

3.4 Dérivée d'une réciproque

Théorème : (Admis)

On suppose que :
- f est bijective de I sur J.
- f est dérivable sur I.
- f' ne s'annule pas sur I.

Alors f^{-1} est dérivable sur J et : $\boxed{(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}}$

4 Fonctions circulaires réciproques

4.1 Fonctions Arc sinus et Arc cosinus

Définition

Arcsin est la fonction réciproque de la restriction de sin à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

En pratique

Si $x \in [-1,1]$, calculer $\theta = \operatorname{Arcsin} x$ revient à trouver un réel θ tel que :
- $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\sin\theta = x$.

- **Conséquences:**
  - Pour tout $x \in [-1,1]$: $\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$.
  - Pour tout $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: $\operatorname{Arcsin}(\sin x) = x$. **Mais c'est faux si** $\theta \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Définition

Arccos est la fonction réciproque de la restriction de cos à $[0, \pi]$.

En pratique

Si $x \in [-1,1]$, calculer $\theta = \operatorname{Arccos} x$ revient à trouver θ tel que :
- $\theta \in [0, \pi]$
- $\cos\theta = x$.

- **Conséquence.**
  - Pour tout $x \in [-1,1]$: $\cos(\operatorname{Arccos} x) = x$.
  - Pour tout $\theta \in [0, \pi]$: $\operatorname{Arccos}(\cos x) = x$. **Mais c'est faux si** $\theta \notin [0, \pi]$.

Théorème : (Admis provisoirement)

- Arcsin est continue et strictement croissante sur $[-1,1]$.
- Arccos est continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$.
- Leurs variations et graphes sont à connaître.

- **Remarque.** La fonction Arcsin est impaire.

Théorème

Pour tout $x \in [-1,1]$: $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$

Théorème

Les fonctions Arcsin et Arccos sont dérivables sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4.2 Fonction Arc tangente

Définition

Arctan est la fonction réciproque de la restriction de tan à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

En pratique

Si $x \in [-1,1]$, calculer $\theta = \operatorname{Arctan} x$ revient à trouver un réel θ tel que :
- $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
- $\tan\theta = x$.

- **Conséquence.**
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$.
  - Pour tout $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$: $\operatorname{Arctan}(\tan x) = x$
  Mais c'est faux si $\theta \notin]-\pi/2, \pi/2[$.

Théorème : (Admis provisoirement)

- Arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\operatorname{Arctan} x \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad \operatorname{Arctan} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$.
- Ses variations et son graphe sont à connaître.

Théorème

Arctan est impaire

Théorème

Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Théorème

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

NOMBRES COMPLEXES - NIVEAU 2

1 Racines n-ièmes dans $\mathbb{C}$

- **Cadre.** n est un entier naturel non nul.

Définition

Pour tout $Z \in \mathbb{C}^*$, une *racine n-ième* de Z est un complexe z tel que $z^n = Z$.

- **Vocabulaire.** Les racines n-ièmes de 1 sont appelées *racines n-ièmes de l'unité*.

1.1 Racines de l'unité

Théorème

Il existe exactement n racines de l'unité, ce sont les complexes $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

- **Notation.** On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Théorème

- Pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$: $\quad \omega_k = \omega_1^k$.
- Si $n \geq 2$, la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$.

• $\mathbb{U}_1 = \{1\}$. • $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$. • $\mathbb{U}_3 = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\right\}$. • $\mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$.

Définition

On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Les racines 3ᵉ de l'unité sont 1, j et j^2 et :

• $j^3 = 1$ • $j^2 = \dfrac{1}{j} = \overline{j}$ • $1 + j + j^2 = 0$ • Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\quad z^2 + z + 1 = (z - j)(z - j^2)$.

1.2 Racines n-ièmes d'un complexe $Z \in \mathbb{C}^*$

Théorème

Le complexe non nul $Z = re^{i\theta}$ possède exactement n racines n-ièmes, ce sont les complexes : $\quad z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \qquad$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

2 Second degré dans $\mathbb{C}$

2.1 Calcul des racines carrées sous forme algébrique

•**Objectif.** Etant donné $Z = a + ib \in \mathbb{C}^*$, on cherche à calculer les racines carrées de Z

Méthode générale pour calculer une racine carrée $z = x + iy$ de Z

La forme algébrique de z^2 étant $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$, l'égalité $z^2 = Z$ donne

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \quad \text{(parties réelles)} \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (2) \quad \text{(modules)} \\ 2xy = b & (3) \quad \text{(parties imaginaires)} \end{cases}$$

- On obtient x^2 via l'opération $(1) + (2)$.
- On obtient y^2 via l'opération $(1) - (2)$.
- (3) permet d'accorder les signes.

2.2 Equation du second degré (E) $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients complexes

- **Cadre.** • $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$ • On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le *discriminant* de l'équation

Théorème

- Si $\Delta = 0$, alors (E) a une unique solution $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, l'équation (E) a deux solutions distinctes : $z_1 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$ où δ est *l'une* quelconque des deux racines carrées de Δ.

2.3 Somme et produit des racines

- **Remarque.** Les deux racines de (E) vérifient $\quad z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} \quad$ et $\quad z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

Théorème

Soit $s, p \in \mathbb{C}$. Les solutions de $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ sont les racines de l'équation $z^2 - sz + p = 0$

2.4 Factorisation des polynômes : deux petits résultats

- **Cadre.** • $a_0,\dots,a_n \in \mathbb{C}$ • $P : z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ est une fonction polynomiale
  • $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P *i.e.* : $P(\alpha) = 0$

Théorème

Il existe une fonction polynomiale Q telle que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = (z-\alpha)Q(z)$$

Théorème

Si les a_k sont tous réels alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P.

3 Interprétation géométrique des complexes

3.1 Orthogonalité, alignement

Théorème

Soient A, B, M trois points d'affixes a, b, z tels que $M \neq A$ et $M \neq B$
$$\left|\frac{z-b}{z-a}\right| = \frac{MB}{MA} \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\ [2\pi].$$

i) A, B et M sont alignés ssi $\dfrac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}$.

ii) (MA) et (MB) sont perpendiculaires ssi $\dfrac{z-b}{z-a} \in i\mathbb{R}$.

3.2 Transformations du plan

Définition

Soient $b, \omega \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
- La translation de vecteur b est l'application $t : z \mapsto z + b$.
- L'homothétie de centre ω et de rapport λ est l'application $h : z \mapsto z'$
  où : $z' - \omega = \lambda(z-\omega)$ *i.e.* $z' = \omega + \lambda(z-\omega)$.
- La rotation de centre ω et d'angle θ est l'application $r : z \mapsto z'$
  où : $z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$ *i.e.* $z' = \omega + \lambda(z-\omega)$.

Définition

On appelle similitude directe toute application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az+b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Théorème

Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $f : z \mapsto az + b$.
- Si $a = 1$, alors f est la translation de vecteur (d'affixe) b.
- Si $a \neq 1$, alors f possède un unique point invariant ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ et, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z' = f(z)$ vérifie : $z' - \omega = a(z-\omega)$.
  On dit que f est la similitude de centre ω, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg a$.

L'adresse de la page des maths est : `https://mathieucathala.fr`