Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

Exercices de cours

Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève pris en défaut de connaissance sur un des exercices de cours.

Exercice 1 *Exemple de cours chap 3, II.1* — Trouver tous les complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que : $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1|$.

Exercice 2 *Exemple de cours chap 3, II.2* — Soient $p, q \in \mathbb{R}$. En factorisant $e^{ip} + e^{iq}$ par l'angle moitié, retrouver la formule de factorisation de $\cos p + \cos q$.

Exercice 3 *Exemple de cours chap 3, II.3* — Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On pose : $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos kx$. Montrer que : $C_n = \begin{cases} \dfrac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \cos \dfrac{nx}{2} & \text{si } x \not\equiv 0[2\pi] \\ n+1 & \text{si } x \equiv 0[2\pi] \end{cases}$

Exercice 4 *Définition de cours chap 3, III.1 puis exercice de la feuille 3* —

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Donner la définition d'un argument de z
2. Déterminer tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $(1+i)^n$ soit réel.

Exercice 5 *Exercice de cours chap 3, III* — Soient $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$.

Montrer que : $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ avec égalité ssi $z_1, \ldots, z_n$ ont même argument.

1 Rappels sur $\mathbb{C}$

1.1 Structure de $\mathbb{C}$

Rappels des propriétés de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1.2 Représentation géométrique des nombres complexes

$\mathbb{C}$ est identifié au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct.

1.3 Conjugaison

Définition

On appelle *conjugué* du nombre complexe $z = x + iy$ le complexe : $\bar{z} \underset{\text{déf.}}{=} x - iy$

Théorème : Propriétés du conjugué

Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ $\quad z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ $\quad$ et $\quad \bar{\bar{z}} = z$

En pratique : caractérisation des réels et des imaginaires purs

Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\boxed{z \in \mathbb{R} \text{ ssi } \bar{z} = z}$ $\quad \boxed{z \in i\mathbb{R} \text{ ssi } \bar{z} = -z}$

Théorème : Règles de calcul

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$:

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
- Si $z \neq 0$: $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$

1.4 Rappels sur le module

Définition

- Le *module* de $z = x + iy$ est le réel positif : $|z| \underset{\text{déf.}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\boxed{|z|^2 = z\bar{z}}$

Théorème : Règles de calcul avec le module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

- $|\bar{z}| = |z|$.
- $|zz'| = |z| \times |z'|$.
- Si $z \neq 0$: $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$.
- $|z^n| = |z|^n$.

- **Remarque.** Si $z \in \mathbb{R}$, le module de z est égal à sa valeur absolue .
- **Géométriquement.** Module et longueurs, module et normes, cercles et disques.

Théorème : Inégalités triangulaires

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$:

- $|z + z'| \leq |z| + |z|'$
- $|z - z'| \geq \big||z| - |z'|\big|$

- **Remarque.** *Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.* $|z + z'| = |z| + |z|'$ ssi $z = 0$ ou s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $z' = kz$ *i.e.* ssi z' est colinéaire à z et de même sens.

2 Exponentielle imaginaire

2.1 Complexes de module 1

- **Notation.** On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1 : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.
- **A retenir.** Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$: $\boxed{z \in \mathbb{U} \quad \text{ssi} \quad \overline{z} = \frac{1}{z}.}$

Définition

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose : $e^{i\theta} \underset{\text{déf.}}{=} \cos\theta + i\sin\theta$.

En particulier : $e^{i0} = e^{2i\pi} = 1$, $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{3i\frac{\pi}{2}} = -i$.

Théorème

i) Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z| = 1$ ssi il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.
ii) Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$: $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta'[2\pi]$.
iii) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.
iv) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$

2.2 Formule de Moivre et formules d'Euler

Théorème

1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.
2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Théorème : Transformation de $1 \pm e^{i\theta}$

$$1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad 1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$

2.3 Applications en trigonométrie

Utiliser Euler pour linéariser $\cos^p x \sin^q x$

1. On utilise les formules d'Euler $\cos^p x \sin^q x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^p \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^q$
2. On développe entièrement avec la formule du binôme
3. On regroupe ensuite les e^{inx} e^{-inx} pour refaire apparaître $\cos nx$ ou $\sin nx$.

Utiliser Moivre pour « délinéariser » $\cos nx$

1. On utilise la formules de Moivre : $\cos nx = \mathrm{Re}\Big((\cos x + i\sin x)^n\Big)$
2. On développe $(\cos x + i\sin x)^n$ par la formule du binôme
3. On extrait la partie réelle.

Calculer des sommes trigonométriques

1. On utilise $\cos\theta = \mathrm{Re}(e^{i\theta})$ et $\sin\theta = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$
2. On utilise la linéarité de Re et Im : $\mathrm{Re}\left(\sum \#\right) = \sum \mathrm{Re}(\#)$ et $\mathrm{Im}\left(\sum \#\right) = \sum \mathrm{Im}(\#)$

3 Forme trigonométrique

3.1 Argument d'un complexe z non nul

Définition

Un argument de $z \in \mathbb{C}^*$ est un $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $e^{i\theta} = \dfrac{z}{|z|}$.

- **Notation.** On écrit : $\arg z \equiv \theta[2\pi]$.
- **Remarque.** Un tel θ existe car $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$
- **Vocabulaire.** L'écriture $z = |z|e^{i\theta}$ est appelée *forme trigonométrique* de z.
- **Retenir.** Pour tous $r, r' > 0$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$: $\boxed{re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \iff r = r' \quad \text{et} \quad \theta \equiv \theta' \ [2\pi]}$

En pratique

La forme trigonométrique se prête bien au calcul de puissances.

3.2 Exponentielle complexe

Définition

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On appelle exponentielle de z, le complexe $\exp(z) \underset{\text{déf.}}{=} e^x e^{iy}$.
Le module de $\exp(z)$ est e^x et y en est un argument.

Théorème : Relation fonctionnelle

Pour tous complexes z et z' : $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$.

L'adresse de la page des maths est : `https://mathieucathala.fr`