Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

Exercice de cours

Exercice 1 *Résultat et exemple de cours* —

1. Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$, continue. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t \geq (b-a)^2$

Exercice 2 *Exemple de cours : III exercice 4* — On cherche les réels a, b minimisant l'intégrale $I(a,b) = \displaystyle\int_0^1 (t^2 - at - b)^2\,\mathrm{d}t$.

1. Exprimer $I(a, b)$ comme une distance (*Préciser l'espace préhilbertien E, le produit scalaire choisi sur E, le sous-e.v. F et faire un dessin pour illustrer la situation*)
2. En déduire que $I(a, b)$ est minimale pour $(a,b) = (1, -\frac{1}{6})$.

Exercice 3 *Exercice feuille 28* —
On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique. On admet que les sous-espaces $\mathscr{S}_n$ (matrices symétriques) et $\mathscr{A}_n$ (matrices antisymétriques) sont supplémentaires.

1. Rappeler la décomposition de $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ selon $\mathscr{S}_n \oplus \mathscr{A}_n$
2. Montrer que $\mathscr{A}_n = \left(\mathscr{S}_n\right)^{\perp}$.
3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $A_s = \frac{1}{2}\left(A + A^{\top}\right)$. Montrer : $\forall S \in \mathscr{S}_n, \quad \|A - S\| \geq \|A - A_s\|$

Exercice 4 *Résultat de cours, II* — Soient E un espace préhilbertien et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille orthogonale de E.

1. Montrer que $\displaystyle\|\sum_{i=1}^{p} u_i\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2$
2. Montrer que si $u_1, \ldots, u_p$ sont non nuls alors $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre.

1 Produit scalaire

Dans tout le chapitre E est un espace vectoriel réel.

1.1 Définitions

Définition

Un produit scalaire sur E est une *forme bilinéaire symétrique définie positive i.e.* une application : $\begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & (x \mid y) \end{array}$

- *Bilinéaire.* Pour tous $x, x', y, y' \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:
  - $(\lambda x + \mu x' \mid y) = \lambda (x \mid y) + \mu (x' \mid y)$
  - $(x \mid \lambda y + \mu y') = \lambda (x \mid y) + \mu (x \mid y')$
- *Symétrique.* Pour tous $x, y \in E$: $(x \mid y) = (y \mid x)$.
- *Positive.* Pour tout $x \in E$: $(x \mid x) \geq 0$.
- *Définie.* Pour tout $x \in E$: si $(x \mid x) = 0$ alors $x = 0$.

1.2 Exemples de références

- Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
- Produit scalaire intégral sur $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$.
- Produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Le tableau du formulaire est à connaître.

1.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Dans toute la suite E est un espace préhilbertien.

Théorème

Pour tous $x, y \in E$: $(x \mid y)^2 \leq (x \mid x)(y \mid y)$ avec égalité ssi x et y sont colinéaires

En pratique : un nouvel outil pour établir des inégalités

On peut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour majorer/minorer des sommes ou des intégrales.

1.4 Norme associée à un produit scalaire

Définition

Soient $x, y \in E$. La *norme* de x est : $\|x\| \underset{\text{déf.}}{=} \sqrt{(x \mid x)}$.
La quantité $\|x - y\|$ est appelée *distance de x à y*

Théorème : Formules à connaître

Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\|x\|^2 = (x \mid x)$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
3. *Inégalité de Cauchy-Schwarz.* $\left|(x \mid y)\right| \leq \|x\| \, \|y\|$
4. *Identités remarquables.*
   - $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y)$ • $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x \mid y)$
   - $\|x\|^2 - \|y\|^2 = (x+y \mid x-y)$
5. *Formule de polarisation.* $(x \mid y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$
6. *Inégalité triangulaire.* $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires de même sens.

2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs orthogonaux

Définition

Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits orthogonaux lorsque $(x \mid y) = 0$.

Théorème : Théorème de Pythagore

Deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux ssi : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Définition

Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite :

- Orthogonale si $\left(u_i \mid u_j\right) = 0$ pour $i \neq j$.
- Orthonormale si, de plus, $\|u_i\| = 1$ pour tout $i \in I$

Théorème : Pythagore étendu

Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille orthogonale, alors : $\left\|\sum_{i=1}^{p} u_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2$

Théorème

Toute famille orthogonale de vecteurs non-nuls est libre.
En particulier toute famille orthonormale est libre

2.2 Coordonnées dans une base orthonormale

- Soit E est un espace euclidien muni d'une base orthnormée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$
- Soient $x, y \in E$ écrits sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$

Théorème

- $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = (x \mid e_i)$; • $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$; • $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

- **Remarque.** Si X et Y sont les colonnes des coordonnées de x et y :

$$(x \mid y) = X^\top Y \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = X^\top X$$

2.3 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

Définition

Soit A une partie de E. L'orthogonal de A est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A : $A^\perp \underset{\text{déf.}}{=} \{x \in E \mid \forall a \in A, (x \mid a) = 0\}$.

$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E (même si A n'en est pas un).

Exemple 1 -♥- $E^\perp = \{0\}$ $\quad \{0\}^\perp = E$ $\quad A^\perp = \left(\mathrm{Vect}A\right)^\perp$

Déterminer $F^\perp$ si F est donné sous forme de « Vect »

Si $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ alors, pour tout $x \in E$: $x \in F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} (x \mid u_1) = 0 \\ \ldots \\ \left(x \mid u_p\right) = 0 \end{cases}$

Théorème

Soit F un sous-espace $\boxed{\text{de dimension finie}}$ de E : • $E = F \oplus F^\perp$ • $(F^\perp)^\perp = F$

- **Conséquence.** Si E est de dimension finie n alors $\dim F^\perp = n - \dim F$.

3 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Ici F est un sous-espace de dimension finie de E. On sait que $F \oplus F^\perp = E$.

3.1 Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales

Définition

- Le projecteur orthogonal sur F, noté p_F est le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$
- La symétrie orthogonale par rapport à F, notée s_F, est la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

- **Retenir.** Le projeté de x est l'unique vecteur de E tel que :

$$p_F(x) \in F \quad \text{et} \quad x - p_F(x) \in F^\perp$$

Théorème : calculer le projeté

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F. Pour tout $x \in E$: $p_F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} (x \mid e_i) e_i$

En pratique : pour calculer le projeté orthogonal

Il faut connaître les trois méthodes (voir savoir-faire) :
- *Méthode 1 : calcul « à vue »*
- *Méthode 2 : avec une base quelconque de F.*
- *Méthode 3 : en base orthonormée*

3.2 Distance à un sous-espace

Définition

Pour tout $x \in E$, on appelle *distance de x à F* le réel $\quad \mathrm{d}(x, F) \underset{\text{déf.}}{=} \inf\limits_{y \in F} \|x - y\|$

Théorème : Théorème d'approximation

Soit $x \in E$ et $y \in F$. Si $y \neq p_F(x)$: $\quad \|x - y\| > \|x - p_F(x)\|$

En particulier : $\boxed{\|x - p_F(x)\| = \mathrm{d}(x, F)}$

- **Interprétation.** $p_F(x)$ est le vecteur de F le plus proche de x au sens de la norme $\|\cdot\|$

3.3 Cas d'un hyperplan

Soit $x \in E$ et H est un hyperplan d'un espace euclidien E.

Théorème

Si a est un vecteur normal à H : • $p_H(x) = x - \dfrac{(x \mid a)}{\|a\|^2} a$ • $d(x, H) = \dfrac{|(x \mid a)|}{\|a\|}$

4 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

- **Objectif.** « Transformer » une famille libre $(u_1, \ldots, u_n)$ en une famille orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$.

Construction de proche en proche des e_k

• Pour $k = 1$: $e_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$ • Pour $k = 2$: $e_2 = \dfrac{u_2 - (u_2 \mid e_1) e_1}{\|u_2 - (u_2 \mid e_1) e_1\|}$

Plus généralement, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$:

• on pose $\widetilde{e_k} = u_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} (u_k \mid e_i) e_i$ • on normalise : $e_k = \dfrac{\widetilde{e_k}}{\|\widetilde{e_k}\|}$.

Théorème

$(e_1, \ldots, e_n)$ orthonormée et : $\quad \forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$.

Théorème : Base orthonormées en dimension finie

On suppose que E est un espace euclidien. Alors :
1. L'espace E possède des bases orthonormées.
2. Toute famille orthonormale de E est complétable en une base orthonormée.