Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

Exercice de cours

Exercice 1 *Exercice 6b) de cours, chap 31* — Soit I un intervalle, $f \in \mathscr{C}(I;\mathbb{R})$, concave et X une variable aléatoire à valeurs dans I. Montrer que : $E\big(f(X)\big) \leq f\big(E(X)\big)$

Exercice 2 *Exemple de cours, I chap 32* — Soient X, Y, indépendantes de loi $\mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Soit $k \in \llbracket 2, 2n \rrbracket$. Montrer que : $P(X+Y=k) = \begin{cases} \frac{k-1}{n^2} & \text{si } 2 \leq k \leq n \\ \frac{2n-k+1}{n^2} & \text{si } n+1 \leq k \leq 2n \end{cases}$

Exercice 3 *Résultat de cours, III chap 32* — Citer et démontrer l'inégalité de Markov.

Exercice 4 *Exercice de cours, III chap 32* — Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(n,p)$. Montrer : $\forall t, \varepsilon > 0, \quad P(X - np \geq n\varepsilon) \leq e^{-nt\varepsilon} E\left(e^{t(X-np)}\right)$

Exercice 5 *Exercice feuille 29* — Soit X un variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, N \rrbracket$. Montrer que $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} P(X > k)$.

VARIABLES ALEATOIRES

1 Loi d'une variable aléatoire

- **Cadre.** Ω est un univers fini et P est une probabilité sur Ω.

1.1 Généralités

Définition

Une *variable aléatoire* sur Ω est une application X de Ω dans un ensemble E. Lorsque $E = \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle (v.a.r.).

- **Remarque.** La famille $(X = k)_{k \in X(\Omega)}$ est un système complet événements.

Attention : ne jamais écrire « $P(X) =$ »

- La quantité $P(X)$ n'est pas définie : X n'est pas un événement.
- On peut s'intéresser à $P(X = k)$: c'est la probabilité de l'*événement* $A = \{X = k\}$.

1.2 La pratique : déterminer la loi de X

- **Vocabulaire.**
- La *loi de X* est la probabilité $P_X : A \mapsto P(X \in A)$ de $\mathscr{P}\big(X(\Omega)\big)$ dans $[0,1]$.
- La *distribution de probabilités de X* est la famille : $\big(P(X = k)\big)_{k \in X(\Omega)}$
- **Remarque.** La loi P_X est déterminée par la distribution de probabilités.

$$\forall A \in \mathscr{P}\big(X(\Omega)\big), \quad P(X \in A) = \sum_{k \in A} P(X = k)$$

Déterminer la loi de X revient à :

1. Donner l'ensemble des valeurs prises par X.
2. Calculer les probabilités $P(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$.

Une astuce classique pour une variable aléatoire X à valeurs entières

Pour $k \in \mathbb{Z}$, il est parfois plus simple de calculer $P(X \leq k)$ que $P(X = k)$.
Dans ce cas on peut utiliser : $P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1)$
Dans la même veine : • $P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1)$
• $P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)$ • $P(X = k) = P(X < k+1) - P(X < k)$

Soit f une fonction définie sur $X(\Omega)$: $\forall y \in f\big(X(\Omega)\big), \quad P\big(f(X) = y\big) = \displaystyle\sum_{k \in f^{-1}(\{y\})} P(X = k)$

2 Espérance et variance d'une variable aléatoire

- **Cadre.** • (Ω, P) est un espace probabilisé fini
  • X et Y sont des variables aléatoires *complexes* sur Ω

2.1 Espérance

Définition

L'espérance de X est le complexe $E(X) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$
.

- **Remarque.** Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors : $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$.
- **Vocabulaire.** Lorsque $E(X) = 0$, on dit que X est centrée.

Exemple 1 — Si X est constante de valeur a, alors $E(X) = a$.

Théorème : Propriétés de l'espérance

1. *Linéarité*. Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$: $E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y)$.
   En particulier : $E(aX+b) = aE(X)+b$.
2. *Inégalité triangulaire.* $|E(X)| \leq E(|X|)$
3. Si X et Y sont réelles
   - *Positivité*. Si $X \geq 0$: $E(X) \geq 0$
   - *Croissance*. Si $X \leq Y$: $E(X) \leq E(Y)$

Attention En général $E(XY) \neq E(X)E(Y)$.

Théorème : Formule de transfert

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On suppose X à valeurs dans I. $E(f(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k)P(X=k)$

2.2 Variance

- **Cadre.** X est une variable aléatoire réelle sur Ω.

Définition

- On appelle variance de X le réel positif $V(X) = E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right)$.
  (« *Moyenne des carrés des écarts à la moyenne* »)
- On appelle écart-type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Théorème : Propriétés de la variance

- *Formule de Koenig-Huygens.* $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $V(aX+b) = a^2 V(X)$.

- **Vocabulaire.** Pour $k \in \mathbb{N}$, l'espérance $E(X^k)$ est le moment d'ordre k de X.

Attention En général $V(X+Y) \neq V(X)+V(Y)$: la variance n'est pas linéaire.

3 Lois usuelles finies

3.1 Loi uniforme

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire X suit *la loi uniforme sur* $[\![1,n]\!]$ et on note $X \sim \mathscr{U}([\![1,n]\!])$ si : • X est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ • $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P(X=k) = \frac{1}{n}$.

En ce cas : $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

- **Généralisation.** Soit E un ensemble fini. On dit que X *suit la loi uniforme sur* E si P_X est la probabilité uniforme sur E *i.e.* si : • X est à valeurs dans E • $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $P(X \in A) = \frac{|A|}{|E|}$

Situation modèle : la loi de l'équiprobabilité

On tire *au hasard* une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On note X le numéro de la boule tirée, alors $X \sim \mathscr{U}([\![1,n]\!])$.

3.2 Loi de Bernoulli

Définition

Soit $p \in [0,1]$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, noté $X \sim \mathscr{B}(p)$ si :
• X est à valeurs dans $\{0,1\}$. • $P(X=1) = p$ (et donc $P(X=0) = 1-p$)
En ce cas : $E(X) = p$ $V(X) = p(1-p)$

Situation modèle : l'indicateur de succès

- On considère une expérience aléatoire à deux issues possibles : succès avec probabilité p et échec avec probabilité $1-p$.
- Si X est la variable aléatoire valant 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, alors $X \sim \mathscr{B}(p)$.

- **Exemple typique.** On lance une pièce truquée donnant Pile avec probabilité p. On note X la variable aléatoire valant 1 si l'on obtient Pile et 0 si l'on obtient Face. Alors $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Définition

Soit $A \subset \Omega$. L'*indicatrice de* A est la variable aléatoire $\mathbb{1}_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$

• $\mathbb{1}_A \sim \mathscr{B}(p)$ où $p = p(A)$ • $P(A) = E(\mathbb{1}_A)$

3.3 Loi binomiale

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Une variable aléatoire X suit *la loi binomiale de paramètre* (n,p), noté $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, si :
- X est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$.
- $\forall k \in [\![0,n]\!], \quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

En ce cas : $E(X) = np$ $\quad V(X) = np(1-p)$

Situation modèle : le compteur de succès

- On considère une expérience de Bernoulli (*i.e.* deux issues possibles : succès avec probabilité p ou échec avec probabilité $1-p$.)
- On effectue n répétitions indépendantes de cette expérience.
- Si X est la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus lors de ces n répétitions, alors $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

- **Exemple typique.** On lance n fois, de manière indépendante, une pièce donnant pile avec probabilité p. On note X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenues. Alors $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

FAMILLES DE VARIABLES ALEATOIRES

1 Variables aléatoires indépendantes, covariance

- **Cadre.** • (Ω, P) est un espace probabilisé fini
  - X, Y et $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires sur Ω.

1.1 Indépendance de variable aléatoires

Définition

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si pour toutes parties A de $X(\Omega)$ et B de $Y(\Omega)$, les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants ce qui équivaut à :

$$\forall i \in X(\Omega),\ \forall j \in Y(\Omega), \quad P\Big(\{X=i\} \cap \{Y=j\}\Big) = P(X=i)P(Y=j)$$

- **Remarques:** Supposons X et Y indépendantes.
  - Pour toutes parties A de $X(\Omega)$ et B de $Y(\Omega)$: $P_{\{X \in A\}}(Y \in B) = P(Y \in B)$
  - Si f est une fonction définie sur $X(\Omega)$ et si g est définie sur $Y(\Omega)$, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Théorème

Si X et Y sont deux variables complexes indépendantes : $E(XY) = E(X)E(Y)$

- **Généralisation.**

Définition

Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont dites indépendantes si pour toutes parties $A_1 \subset X_1(\Omega), \dots, A_n \subset X_n(\Omega)$, les événements $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\}$ sont indépendants. C'est équivalent à :

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times \dots \times P(X_n = x_n)$$

pour tous $x_1 \in X_1(\Omega), \dots, \forall x_n \in X_n(\Omega)$.

Théorème : Lemme des coalitions

Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.

- **Remarque.** Dans l'énoncé qui précède la fonction f est définie sur $(X_1, \dots, X_m)(\Omega)$ et g est définie sur $(X_{m+1}, \dots, X_n)(\Omega)$

1.2 Somme de variables aléatoires indépendantes

Théorème

On suppose que $X_1, \dots, X_n$ sont **indépendantes** et toutes de loi $\mathscr{B}(p)$. La variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi binomiale de paramètre (n,p).

Théorème : Pythagore

Si X, Y sont deux v.a.r. indépendantes, alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

- **Généralisation.** Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes : $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

1.3 Covariance

- **Cadre.** X et Y sont deux variables aléatoires réelles.

- **Rappel.** On a toujours $V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2(E(XY)-E(X)E(Y))$

Définition

On appelle *covariance* de X et Y le réel $\text{cov}(X,Y) = E\big([X-E(X)][Y-E(Y)]\big)$.
On a aussi $\text{cov}(X,Y) = E(XY)-E(X)E(Y)$.

- **Remarque.** En particulier $\text{cov}(X,X) = V(X)$.
- **Remarque.** Lorsque $\text{cov}(X,Y) = 0$, on dit que X et Y sont non corrélées. C'est le cas si X et Y sont indépendantes.

Théorème

$$V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2\,\text{cov}(X,Y)$$

- **Remarque.** Plus généralement : $V(X_1+\cdots+X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n} \text{cov}(X_i,X_j)$

2 Couples

- **Cadre.** • (Ω,P) est un espace probabilisé fini
  • X,Y sont des variables aléatoires sur Ω.
- **Vocabulaire.** • La loi du couple (X,Y) est appelée *loi conjointe de X et Y*.

• Les lois de X et de Y sont *les lois marginales du couple (X,Y)*.

En pratique : déterminer la loi conjointe de X et Y revient à

1. déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$
2. calculer les probabilités $P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})$ pour $i\in X(\Omega)$ et $j\in Y(\Omega)$.

Théorème : La loi conjointe donne les lois marginales

- Pour tout $i\in X(\Omega)$: $\quad P(X=i) = \sum_{j\in J} P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})$
- Pour tout $j\in Y(\Omega)$: $\quad P(Y=j) = \sum_{i\in I} P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})$

- **Remarque.** On a toujours $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} P(\{X=x_i\}\cap\{Y=Y_j\}) = 1$.
- **Remarque.** Les lois des marginales X et Y ne permettent pas de retrouver la loi conjointe.

2.1 Loi conditionnelle

- **Vocabulaire.** On fixe $A\in\mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(A)\neq 0$.
- La *loi conditionnelle de Y sachant A* est la probabilité $B\mapsto P_A(Y\in B)$ de $\mathscr{P}\big(Y(\Omega)\big)$ dans $[0,1]$.
- Elle est déterminée par la *distribution de probabilités* : $\big(P_A(Y=j)\big)_{j\in Y(\Omega)}$

Utiliser la loi conditionnelle pour trouver la loi :

Dans le cas où l'on *connaît* les $P_{\{X=i\}}(Y=j)$ et on *cherche* la loi de Y *i.e.* les $P(Y=j)$, on peut utiliser : $\quad P(Y=j) = \sum_{i\in X(\Omega)} P_{\{X=i\}}(Y=j)P(X=i)$

2.2 Espérance d'un produit de variables aléatoires réelles

- **Remarque.** La formule de transfert vaut aussi dans le cas d'un couple, elle permet d'écrire

$$E(f(X,Y)) = \sum_{i\in X(\Omega)}\sum_{j\in Y(\Omega)} f(i,j)P\big(\{X=i\}\cap\{Y=j\}\big)$$

Théorème

$$E(XY) = \sum_{i\in X(\Omega)}\sum_{j\in Y(\Omega)} ijP\big(\{X=i\}\cap\{Y=j\}\big)$$

3 Complément : inégalités probabilistes

- **Cadre.** X est une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini (Ω,P).

Théorème : Inégalité de Markov

Si X est positive alors, pour tout $a>0$: $\quad P(X\ge a)\le \dfrac{E(X)}{a}$

Théorème : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Pour tout $a>0$: $\quad P(|X-E(X)|\ge a)\le \dfrac{V(X)}{a^2}$.