Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

Exercice de cours

Exercice 1 *Exercice de cours, Chap 30, I* — Montrer que : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$

Exercice 2 *Feuille 28* — Soit u une suite de réels strictement positifs et $\ell \in]0,1[$.

1. Démontrer que si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication : Avec la définition de $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

Exercice 3 *Exercice de cours, Chap 30, III (Ex. 46, banque INP)* —
Etudier la nature de la série $\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$

1 Généralités

1.1 Vocabulaire sur les séries

Dans toute le chapitre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite réelle ou complexe.

Définition

- La *série de terme général* u_n est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^e *somme partielle* de la série.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = S_n - S_{n-1}$

- **Vocabulaire.**
  - On écrit « le série $\sum u_n$ » au lieu de « la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ».
  - Dire que « la série $\sum u_n$ converge » c'est dire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Définition

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

- La *somme* de la série est : la limite finie $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le n^e *reste* de la série est la différence : $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$
  La suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Attention Ne pas confondre les notations : $\sum u_n \neq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

Théorème

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
- Si $\sum u_n$ est converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

1.2 Premiers exemples classiques

Théorème : Série exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$. La *série exponentielle* $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

Théorème : Séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$.

La série $\sum q^k$ converge si et seulement si $|q| < 1$. En ce cas : $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

Théorème : Séries télescopiques

La série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge si et seulement si la suite (v_n) converge.

Théorème : Séries alternées

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, décroissante de limite nulle. La *série alternée* $\sum(-1)^n a_n$ converge
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$: • $|R_n| \leq a_{n+1}$ • R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$

Théorème

Si la série $\sum u_n$ converge, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ n'assure en rien que la série $\sum u_n$ converge.

En pratique : divergence grossière

Si u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.

1.3 Comparaison avec une intégrale

- **But.** On étudie la nature de $\sum f(k)$ où f est une fonction décroissante.

En pratique : technique de comparaison série-intégrale

La décroissance de f permet de comparer : $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ à l'intégrale $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La *série de Riemann* : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2 Séries à termes positifs

2.1 Sommes partielles d'une série à termes positifs

Théorème

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes positifs. La série $\sum u_n$ converge ssi elle est majorée (ie ssi la suite des sommes partielles est majorée).

2.2 Critères de convergence par comparaison

Théorème : Comparaison par des inégalités

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'*à partir d'un certain rang*, $0 \leq u_n \leq v_n$.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Théorème : Comparaison par des équivalents

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.

Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (*i.e.* si l'une converge alors l'autre converge et si l'une diverge, l'autre diverge)

Théorème : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.

1. Si $u_n = O(v_n)$, et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $u_n = o(v_n)$, et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

- **Remarque.** Les trois théorèmes précédentes sont aussi vrais si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq 0$ et $v_n \leq 0$. L'important est que (u_n) et (v_n) gardent un signe constant (typiquement, pas de $(-1)^n$).

En pratique : comparaison avec une série de Riemann

Lorsque l'on étudie la nature d'une série $\sum u_n$, si on trouve $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $u_n = o(\frac{1}{n^\alpha})$. Puisque $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, $\sum u_n$ converge aussi.

3 Nature d'une série dans le cas général

3.1 Convergence absolue

Théorème

Si $\sum |u_n|$ converge alors $\sum u_n$ converge. On dit que $\sum u_n$ *converge absolument*

Attention Une série peut converger sans converger absolument :

Par exemple : la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument

Théorème : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'à partir d'un certain rang, $v_n \geq 0$.

1. Si $u_n = O(v_n)$, et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument.
2. Si $u_n = o(v_n)$, et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument.

4 Nature d'une série : bilan des techniques

4.1 Bilan des techniques

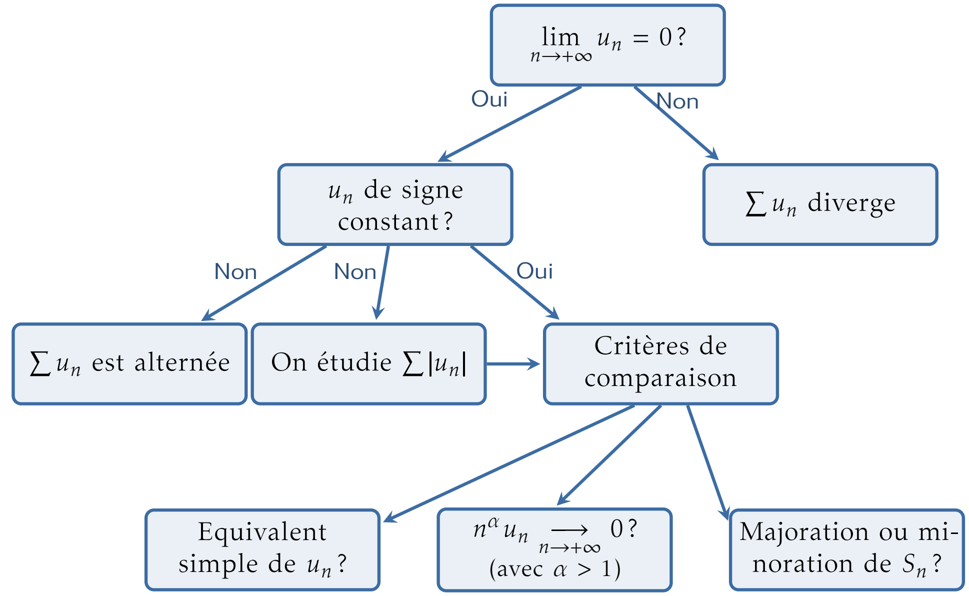
Utiliser les DL pour étudier la nature de $\sum u_n$

On découpe u_n en morceaux plus simples puis on applique les critères de comparaison à chacun des morceaux

Les « morceaux » en question sont des séries de références dont on connaît la nature :

- Les série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, qui sont convergentes ssi : $\alpha > 1$
- Les série de Riemann alternées $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, qui sont convergentes ssi : $\alpha > 0$. (note [a]).

[a]. Lorsque $\alpha > 0$, la suite $(\frac{1}{n^\alpha})$ est décroissante de limite nulle donc le théorème des séries alternées s'applique



L'adresse de la page des maths est : `https://mathieucathala.fr`