Cette feuille est composée d'exercices ou résultats de cours qui ont tous été corrigés ou démontrés en classe.
La colle débutera par la présentation d'un de ces exercices, celui-ci sera noté sur 8 points.
Plus que de simplement savoir les résoudre, le but est d'être capable d'en exposer clairement la solution à quelqu'un : suivant les cas, cela peut par exemple impliquer de savoir synthétiser les idées principales, de préciser quels résultats du cours sont mis en jeu, d'effectuer efficacement les calculs ...

1 Les anciens ...

Rappels sur l'étude de fonctions, convexité

Exercice 1 *Exemple de cours, chap. 1 (I)* — Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tous $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $\quad f(x) - f(y) = (x-y) f'\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Exercice 2 *Théorème de cours, chap 1 (II)* — Montrer que si f est convexe sur un intervalle I alors pour tout $a \in I$, la fonction $\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$ *(On ne demande pas ici de démontrer l'implication réciproque)*

Exercice 3 *Théorème de cours, chap 1 (II) (démontré dans la partie II du chap 2)* — Enoncer et démontrer l'inégalité de Jensen.

Nombres complexes

Exercice 4 *Exercice feuille 3* — Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, déterminer le module de $z^k - 1$.
2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 5 *Exercice de cours chap 3, III* — Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$.
Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|$ avec égalité ssi $z_1, \dots, z_n$ ont même argument.

Exercice 6 *Exercice de cours, chap. 5 (I.1)* — Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$.
2. Montrer que les solutions sont réelles et les exprimer simplement à l'aide des fonctions cosinus et sinus.

Fonctions usuelles

Exercice 7 *Résultats de cours, chap. 4 (IV)* —

1. Rappeler l'expression de la dérivée de Arcsin sur $]-1, 1[$.
2. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$: $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$
3. Démontrer la formule de la question 1.

Exercice 8 *Exemple de cours, Chap 4, IV.2* —
Résoudre l'équation d'inconnue x : $\qquad \operatorname{Arctan} 2x + \operatorname{Arctan} 3x = \frac{\pi}{4}$.

Primitives et équations différentielles

Exercice 9 *Exemple de cours, Chap 7, II.4* — Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad f'(x) = f(\pi - x)$.

Applications

Exercice 10 — Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$

1. *Cours, chap 9–II*. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
2. *Exercice feuille 8*. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 11 *Ex. de cours, chap 9–III* — On note f l'application $z \mapsto z^2$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

1. On note Δ la droite d'équation $y = x$. Montrer que $f(\Delta) = i\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}_-^*) = i\mathbb{R}^*$.

Suites numériques

Exercice 12 *Exercice feuille 9* — Soit $a \in]0, 1[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (1 + a^k)$. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 13 *Exercice feuille 9 bis* — On considère une suite u strictement positive.
On suppose que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers un réel $k < 1$. Montrer que $u_n \to 0$.

Exercice 14 *Ex. de cours, chap 12 - I* — Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad v_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. $\qquad$ Montrer que : $\quad v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$

Arithmétique des entiers relatifs

Exercice 15 *Résultat et ex. du cours, chap 11, III.3* —

1. Démontrer le lemme de Gauss.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $7x + 12y = 3$.

Exercice 16 *Résultat, chap 11, IV.3* —
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit p un nombre premier. Montrer que $n^p \equiv n \; [p]$.

Continuité

Exercice 17 *Résultat de cours, chapitre 13.0 – II* — Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$. Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est continue en a.
ii) Pour toute suite (u_n) d'éléments de I telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = a$: $\quad f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$

Exercice 18 *Résultat de cours, chapitre 13.0 – II* — Montrer que les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad f(x+y) = f(x) + f(y)$ sont les fonctions linéaires *i.e.* les fonctions de la forme $x \mapsto ax$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Dérivabilité

Exercice 19 *Résultat de cours chap 14.0,II–3 et dém. de cours, chap 14.1,I–2* —

1. Enoncer le théorème de la limite de la dérivée.
   Démontrer ce résultat en utilisant l'égalité des accroissements finis.
2. Prouver que l'implication : $(f$ est dérivable en $a) \Longrightarrow (f'$ admet une limite finie en $a)$ est fausse. *on pourra considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :*
   $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ *pour tout* $x > 0$ *et* $f(0) = 0$.

Exercice 20 *Résultat et démonstration de cours, chap 14.1,I–2 et ex. feuille 12* —

1. Enoncer et démontrer le théorème de l'égalité des accroissements finis.
2. Etudier la limite en $+\infty$ de $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 21 *Dém. de cours, chap 14.1, I–3* — Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I. Montrer que f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I.

Groupes

Exercice 22 *Démonstration de cours, chap 15, II* — Soient $(G,\cdot)$ un groupe d'élément neutre e, $(G',\star)$ un groupe d'élément neutre e' et $f : G \to G'$ un morphisme de groupe. Montrer que f est injectif si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{e\}$.

Exercice 23 *Exercice feuille 13 (questions 1 et 2)* — Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$, non réduit à $\{0\}$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $H = p\mathbb{Z}$

Polynômes

Exercice 24 *Résultats de cours, chap 16, III* —
Enoncer et démontrer la formule de Taylor pour les polynômes.

Exercice 25 *Exemple de cours, chap. 16, III* — Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si : $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$, alors a est racine d'ordre m de P (*On ne demande pas ici de montrer la réciproque*)

Exercice 26 *Exercice feuille 14* — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On pose $P = (X+1)^n - e^{2ina}$.

a) Calculer les racines de P dans $\mathbb{C}$. **b)** En déduire : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\Big(a + \frac{k\pi}{n}\Big) = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}$.

Matrices

Exercice 27 *Exercice feuille 15* — Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 28 *Exercice feuille 15* — On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \dfrac{1}{4}(I_3 + J)$.

1. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On pose : $u_0 = v_0 = 0$, $w_0 = 1$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 2v_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n) \end{cases}$
   Calculer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Fractions rationnelles

Exercice 29 *Cours : IV Ex 2b, chap 18* — Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{(t^2+t+1)(1+t)^3}\,dt$ pour $x > 0$

Exercice 30 *Exercice feuille 16* — Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4}{\cos^3\theta}\,d\theta$ (poser $t = \sin\theta$)

Analyse asymptotique

Exercice 31 *Exercice feuille 17* — Montrer que $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 32 *Résultat de cours (II chap 19.0) et ex. de cours (Ex 3 du I chap. 19.1)* —

1. Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
   Montrer que si $u_n \sim v_n$ alors u_n et v_n ont même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, à partir d'un certain rang, de : $u_n = \operatorname{sh}\dfrac{1}{n} - \tan\dfrac{1}{n}$

Espaces vectoriels

Exercice 33 *Exercice feuille 19* — Soient $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R}$, tous distincts. On note D la matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \ldots, d_n$ et $\mathscr{C}(D)$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec D. Montrer que $(D^k)_{0 \le k \le n-1}$ est une base de $\mathscr{C}(D)$

Exercice 34 *Exercice feuille 19* — Soit $a \in \mathbb{C}$.
On note F l'ensemble des suites $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n$.
Déterminer une base du plan vectoriel F suivant la valeur de a.

Intégration

Exercice 35 *Exercice de cours, Chap 22, III* —

On considère la fonction $H : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt$ définie sur $]1, +\infty[$.

1. *Traitée dans un exemple du I.2* On note u la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Montrer que u est prolongeable par continuité en 1.
2. A l'aide de la fonction u, calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

Exercice 36 *Exercice feuille 20* — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,dt$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer grâce à une intégration par parties : $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
2. Etudier la monotonie de (W_n).
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Montrer que (u_n) est une suite constante.
4. En déduire un équivalent de W_n.

Exercice 37 *Exercice feuille 20* — Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$

Montrer : $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{=} \frac{f(1)}{n} - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$

2 ... et les nouveaux

Applications linéaires

Exercice 38 *Exercice feuille 20* — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E = 0$. Montrer : $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 39 *Exercice feuille 21* — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E. Etablir : $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f \iff f^2 = 0$ et $n = 2\mathrm{rg}(f)$.

Exercice 40 *Exercice feuille 21* — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que : $\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) \le \dim(\mathrm{Ker}\, g) + \dim(\mathrm{Ker}\, f)$

Exercice 41 *Exemple 1 du cours, Chap 24 I* — On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$: $F = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$

1. Vérifier que F et G sont supplémentaires (*Vous pouvez au choix opter pour une preuve à base de dimensions ou pour une preuve qui fournit la décomposition*)
2. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et p le projecteur sur F parallèlement à G. Calculer $p(u)$

Dénombrement

Exercice 42 *Ex. de cours, Chap 25 III* — Soit E un ensemble à n éléments.

1. Calculer le nombre a de couples (A,B) de parties de E tels que $A \cap B = \varnothing$.
2. Déterminer le nombre b de couples (A,B) de parties de E tels que $A \subset B$.

Exercice 43 *Exercice feuille 23* — Soit E un ensemble de cardinal n.
Calculer : $\displaystyle\sum_{A,B \in \mathscr{P}(E)} |A \cap B|$

Exercice 44 *Exercice feuille 23* — Soit E un ensemble de cardinal n. On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications $f : E \to E$ vérifiant $f \circ f = f$. Montrer : $|\mathscr{F}| = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}$

Probabilités

Exercice 45 *Exercice feuille 24* — Une urne se trouvent n boules rouges et n boules vertes que l'on tire toutes, une à une, sans remise. On note p_n la probabilité d'avoir un changement de couleur à chaque tirage.

1. Calculer p_n en fonction de n.
2. En utilisant la formule de Stirling, démontrer que $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\sqrt{\pi n}}{2^{2n}}$.

Exercice 46 *Ex. de cours, Chap 26, III* — On effectue des tirages successifs dans deux urnes : l'urne U_1 contient 3 boules blanches et 1 noire, l'urne U_2 contient 1 boule blanche et 4 noires. On effectue des tirages successifs comme suit : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. Si la boule tirée est blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 ; sinon le tirage suivant se fait dans U_2. On note p_n la probabilité que le n^{e} tirage donne une boule blanche. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 47 *Exercice feuille 24* —
On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
2. Etudier la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Matrices et applications linéaires

Exercice 48 *Résultats de cours, Chap 27, II.3* — Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension (finie), soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ des bases de E et F et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Démontrer que f est bijective si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible.

Exercice 49 *Exercice feuille 25* — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ mais $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle f a pour matrice par blocs : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 50 *Exercice de cours, Chap 27, II.4* — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$.

1. Montrer : $\dim \mathrm{Ker} f = 2$.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 51 *Exercice de cours, Chap 27, III* — On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$.
On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer une base de $F = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et une base de $G = \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$
2. En déduire une méthode de calcul de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on ne demande pas le calcul effectif).

Approximations

Exercice 52 *Chap 28-I, déf. 1 et th. 1* — Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$, continue par morceaux.

1. Donner l'expression des sommes de Riemann de f
2. Démontrer le résultat de convergence dans le cas où f est lipschitzienne.

Exercice 53 *Chap 28-II, déf. 1 et th. 1* — Enoncer la formule de Taylor à reste intégral (avec ses hypothèses) et démontrer cette formule.

Exercice 54 *Exemple de cours, Chap 28-II* — En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à une fonction bien choisie, montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^z$.

Exercice 55 *Chap 28-IV, th. 1* — Enoncer et démontrer le théorème de Heine

Matrices de niveau 3

Exercice 56 *Exercice de cours, chap 29-I* — Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $\left|a_{i,i}\right| > \sum_{j\neq i} \left|a_{i,j}\right|$. Montrer que A est inversible.

Exercice 57 *Résultats de cours, Chap 29, I* — Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
1. Montrer que A est inversible si et seulement si $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.
2. Montrer que A est inversible si et seulement si $\operatorname{rg}(A) = n$.

Démontrés en considérant l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Exercice 58 *Chap 29-II, cours* —
1. Pour toutes $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $A \sim B$ pour « B est semblable à A ». Montrer que la relation « $\sim$ » ainsi définie est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ pour toutes $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si $A \sim B$ alors $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

Exercice 59 *Chap 29-II, Th 3* — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et p est un projecteur de E. Montrer que $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$.

Exercice 60 *Chap 29-II, cours* — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$, de rang r. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F pour lesquelles :

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = J_r \quad \text{où :} \quad J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Complément : formes linéaires et hyperplans

Exercice 61 *Résultats de cours* — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1,n]\!]$.
1. Montrer que l'intersection de p hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de E dimension au moins $n-p$.
2. Montrer que tout sous-espace de E de dimension $n-p$ est l'intersection de p hyperplans de E.

Séries numériques

Exercice 62 *Exercice de cours, Chap 30, I* — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Montrer que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 63 *Exercice de cours, Chap 30, I (Ex. 8, banque INP)* —
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante positive de limite nulle.
1. Montrer que la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.
2. Donner le signe ainsi qu'une majoration de la valeur absolue des restes de la série $\sum (-1)^n a_n$

Exercice 64 *Résultat de cours Chap 30 II et exemple de cours Chap 30 III* —
1. Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ à termes positifs (avec $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang). On suppose que $u_n \sim v_n$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. Etudier la nature de $\sum \dfrac{\left((-1)^n + i\right)\sin(\frac{1}{n})\ln n}{\sqrt{n+3}-1}$.