Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

Exercice de cours sur 8 points

L'un des exercices de la liste fournie.

MATRICES ET APPLICATIONS LINEAIRES

Tout le chapitre est au programme

MATRICES (NIVEAU 3)

1 Théorie du rang

1.1 Image et noyau d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

En pratique

- L'image de A est le sous-espace vectoriel engendré par ses vecteurs colonnes.
- Le noyau de A est l'ensemble des solutions du système $AX = 0$: les lignes de A donnent un système d'équation du noyau.

Théorème : Critère $AX = 0$

On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible ssi $\operatorname{Ker} A = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$

- **Remarque.** $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi $(C_1, \dots, C_n)$ est libre

1.2 Rang d'une matrice

Définition

On appelle rang de A le rang, dans $\mathbb{K}^n$, de la famille de ses vecteurs colonnes.

- **Remarque.** Autrement dit $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rg} f_A$.
- $\boxed{\operatorname{rg}(A) \leq p \text{ et } \operatorname{rg}(A) \leq n}$. • $\forall B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ $\boxed{\operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg}(A) \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg}(B)}$
- $\forall P \in GL_n(\mathbb{K}), \forall Q \in GL_p(\mathbb{K}), \quad \operatorname{rg}(PA) = \operatorname{rg}(AQ) = \operatorname{rg}(A)$

Théorème : Inversibilité et rang

On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible ssi $\operatorname{rg}(A) = n$.

Théorème : Lien avec le rang d'une famille de vecteurs

Soient $(E, \mathscr{B})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base et $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p) \in E^p$: $\quad \operatorname{rg}(\mathscr{F}) = \operatorname{rg}\left(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})\right)$

Théorème : Lien avec le rang d'une application linéaire

Soient $(E, \mathscr{B})$ et $(F, \mathscr{C})$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie munis de bases et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$: $\quad \operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}\left(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right)$

Théorème : Rang de la transposée

- $\operatorname{rg}(A^\top) = \operatorname{rg}(A)$
- Le rang de A est aussi le rang de la famille de ses lignes

1.3 Rang et matrices extraites

Théorème

Le rang de A est la taille maximale des matrices carrées inversibles extraites de A
Pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\operatorname{rg}(A) \geq r$ ssi A possède une matrice extraite inversible de taille r.

1.4 Méthode de Gauss pour le calcul du rang

- **Remarque.** Les opérations élémentaires conservent le rang.

Calcul du rang par opérations élémentaires

Toute matrice est transformable en une matrice échelonnée par opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

2 Matrices équivalentes, matrices semblables

2.1 Matrices semblables et trace

Définition

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. B est semblable à A si il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

- **Remarque.** La similitude des matrices est une relation d'équivalence.
- **Traduction en terme d'applications linéaires.** Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est donné et si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E alors les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'} f$ sont semblables

Définition

La trace de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est la somme de ses coefficients diagonaux : $\mathrm{tr}(A) \underset{\text{déf.}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$

Théorème

1. Pour toutes $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B)$.
2. $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\quad \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Théorème

Deux matrices semblables ont même trace.

Attention La réciproque est fausse.

- **Conséquence.** Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et si $f \in \mathscr{L}(E)$, les matrices qui représentent f dans les diverses bases de E ont toutes la même trace. Ceci permet de définir la trace de f comme étant la trace commune de ces matrices.

Théorème

Si p est un projecteur de E, alors $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

2.2 Matrices équivalentes et rang

Définition

$A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont *équivalentes* s'il existe $U \in GL_n(\mathbb{K}), V \in GL_p(\mathbb{K})$ t.q. $B = UAV$

- **Remarque.** C'est le cas lorsque l'on peut transformer A en B par une série d'opérations élémentaires.
- **Traduction en terme d'applications linéaires.** Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est donnée et si $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ sont des bases de E et $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ sont des bases de F alors les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$ sont équivalentes.
- **Remarque.** L'équivalence des matrices est une relation d'équivalence.

Théorème

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Alors A est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Théorème

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. A et B sont équivalentes si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

FORMES LINEAIRES ET HYPERPLANS

- **Cadre.** E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

1.1 Généralités

Rappels sur les formes linéaires

- Une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
- Si E est de dimension finie $\dim\Big(\mathscr{L}(E,\mathbb{K})\Big) = \dim E$
- On appelle hyperplan de E tout *noyau d'une forme linéaire non nulle* de E

Rappels sur les formes linéaires coordonnées

On suppose E de dimension finie n. Soit $\mathscr{B} = (b_1,\dots,b_n)$ une base de E

- Pour $j \in [\![1\,,n]\!]$ la j^e *forme linéaire coordonnée* de E est φ_j : $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \displaystyle\sum_{i\in I} x_i b_i & \longmapsto & x_j \end{array}$
- La famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est une base de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$.
- Si H est un hyperplan de E, il existe $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que :
$$H = \{x \in E \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$
où $(x_1,\dots,x_n)$ désignent les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$

1.2 Hyperplans : trois définitions équivalentes

Théorème

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E.

ii) H est supplémentaire d'une droite : $E = H \oplus D$ où : $D = \mathrm{Vect}(e)$ avec $e \neq 0$.

Si E est de dimension finie n elles sont équivalentes à :

iii) H est de dimension $n-1$.

- **Remarque.** • En dim. 3 : hyperplan = plan• En dim. 2 : hyperplan = droite

Théorème : « Unicité » de l'équation d'un hyperplan

Soit H un hyperplan de E et φ, ψ deux formes linéaires non nulles de E telles que $H = \mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\psi$. Il existe $k \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ tel que $\psi = k\phi$.

Théorème

1. L'intersection de p hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension au moins $n-p$.
2. Tout sous-espace de dimension $n-p$ est l'intersection de p hyperplans de E

- **Interprétation.** Chaque hyperplan fournit une équation, et chaque équation est une contrainte supplémentaire qui enlève potentiellement un degré de liberté.