Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

Exercice de cours

Exercice 1 *Résultats de cours, Chap 27, II.3* — Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension (finie), soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ des bases de E et F et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Démontrer que f est bijective si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible.

Exercice 2 *Exercice feuille 25* — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ mais $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle f a pour matrice par blocs : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 *Exercice de cours, Chap 27, II.4* — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$.

1. Montrer : $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 *Exercice de cours, Chap 27, III* — On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer une base de $F = \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et une base de $G = \operatorname{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$
2. En déduire une méthode de calcul de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on ne demande pas le calcul effectif).

MATRICES ET APPLICATIONS LINEAIRES

1 Rôle représentatif des matrices

- **Cadre.** E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$, F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{B} = (b_1, \dots, b_p)$ est une base de E, $\mathscr{C} = (c_1, \dots, c_p)$ est une base de F.

1.1 Matrice d'une application linéaire

Définition

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

- La matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, est la matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de $f(b_j)$ dans la base $\mathscr{C}$.
- C'est la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que $a_{i,j}$ est la i-ème coordonnée dans $\mathscr{C}$ du vecteur $f(b_j)$.

ou encore :

- $$\forall j \in [\![1,p]\!], \quad f(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} c_i$$

- **Remarque.** Plus généralement, si $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_p)$ est une famille de p-vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel F, on appelle *matrice de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{C}$*, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\mathscr{F}$ la matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de x_j dans la base $\mathscr{B}$.

1.2 Correspondance : « application linéaire ↔ matrice »

Théorème

L'application $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme.

Théorème

$$\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$$

2 Dictionnaire : applications linéaires ↔ matrices

2.1 Utiliser la matrice pour trouver le noyau et l'image

- **Cadre.** E est un $\mathbb{K}$-e.v. muni d'une base $\mathscr{B}$. F est un $\mathbb{K}$-e.v. muni d'une base $\mathscr{C}$.
- Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$. Soient $x \in E$ et $y \in F$.

Théorème

On note X la colonne des coordonnées de x et Y la colonne des coordonnées de y.

$$f(x) = y \iff AX = Y$$

2.2 Utiliser les matrices pour calculer des composées

- **Cadre.** $(E,\mathscr{B})$, $(F,\mathscr{C})$ et $(G,\mathscr{D})$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis de bases

Théorème

Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g\circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g)\times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)}$

- **Cas des endomorphismes.** Pour tous $f,g \in \mathscr{L}(E)$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g\circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)\times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^k) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f\right)^k$

2.3 Utiliser la matrice pour prouver la bijectivité

On suppose ici que E et F sont de même dimension finie n.

Théorème

$f \in \mathscr{L}(E,F)$ est bijective si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible. Dans ce cas

$$\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1})$$

- **Cas d'un endomorphisme.** $f \in \mathscr{L}(E)$ est bijectif ssi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f$ est inversible.

En ce cas : $\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right)$

- **Cas d'une famille de vecteurs.** Une famille $\mathscr{F} = (u_1,\dots,u_n)$ de n vecteurs de E est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\mathscr{F}$ est inversible

2.4 Matrice d'un endomorphisme dans une base bien choisie (exemples)

3 Changement de base

3.1 Matrice de passage

Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

Définition

On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \underset{\text{déf.}}{=} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\mathscr{B}'\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$$

- **Interprétation.** $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ exprimés dans la base $\mathscr{B}$.

Théorème

$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est inversible et : $(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

3.2 Effet sur la matrice d'une application linéaire

- **Cadre.** $f \in \mathscr{L}(E,F)$ • $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E • $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux bases de F

On pose : • $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ • $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$ • $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ • $Q = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$

Théorème

$$A' = Q^{-1}AP$$

3.3 Effet sur la matrice d'un endomorphisme

- **Cadre.** $f \in \mathscr{L}(E)$ • $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E

On pose : • $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f$ • $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'} f$ • $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$

Théorème

$$A' = P^{-1}AP$$

3.4 Effet sur les coordonnées d'un vecteur

- **Cadre.** $x \in E$. $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E et $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. On note X (resp. X') la colonne des coordonnées de x (resp. x') dans $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$)

Théorème

$$X = PX'$$