Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

Exercice de cours

Exercice 1 *Ex. de cours, Chap 25 III* —

1. Proposer une démonstration combinatoire de la formule de Pascal.
2. Proposer une démonstration combinatoire de : $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$ (pour $1 \leq p \leq n$)

Exercice 2 *Ex. de cours, Chap 25 III* — Soit E un ensemble à n éléments.

1. Calculer le nombre a de parties de E tels que $A \cap B = \varnothing$.
2. Déterminer le nombre b de couples (A, B) de parties de E tels que $A \subset B$.

Exercice 3 *Th du cours, Chap 26, III* —

1. Enoncer et démontrer la formule des probabilités totales.
2. Enoncer et démontrer la formule de Bayes.

Exercice 4 *Exercice, feuille 24* —
On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

DENOMBREMENT

Dans ce qui suit E, F sont des ensembles.

1 Ensembles finis

1.1 Résultats théoriques (admis)

Définition

- E est dit fini si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, il existe une bijection u de $[\![1, n]\!]$ sur E.
- Dans ce cas l'entier n est unique, appelé *cardinal* de E et noté $\mathrm{Card}(E)$ ou $|E|$.

- **Remarque.** $\mathrm{Card}\varnothing = 0$

Théorème : Sous-ensembles

Soit A une partie de E. Si E est fini :
- A est finie et $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(E)$ • $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E)$ ssi $A = E$.

Théorème

Soient A, B deux ensembles finis : $\mathrm{Card}(A\cup B) = \mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)-\mathrm{Card}(A\cap B)$
- si A et B sont disjoints, $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$
- Si $A \subset E$: $\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$ (avec $B = \overline{A}$)

Théorème : Cas des applications

- Si E est fini et s'il existe une surjection f de E sur F alors F est fini et $|F| \leq |E|$
- Si F est fini et s'il existe une injection f de E dans F alors E est fini et $|E| \leq |F|$

Si E et F sont finis et si $|E| = |F|$ alors, pour toute application $f : E \to F$:
i) f est injective $\iff$ *ii)* f est surjective $\iff$ *iii)* f est bijective

1.2 Multiplier ou additionner les résultats ?

- **Principe des bergers.** La réunion disjointe de n ensembles tous de cardinal p est un ensemble de cardinal np

On multiplie les résultats si

On dénombre par étapes successives : « ... puis ... »

Théorème : Produit cartésien

Si $E_1, \dots, E_n$ sont finis : $|E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n| = \prod_{i=1}^{n} |E_i|$ En particulier : $|E^n| = |E|^n$

Théorème : Ensemble des applications de E dans F

Si E et F sont finis, alors l'ensemble $\mathscr{F}(E, F) = F^E$ est fini et : $|\mathscr{F}(E, F)| = |F|^{|E|}$

On additionne les résultats si

On dénombre par disjonction de cas : « Ou bien ... ou bien ... »

2 p-listes

Dans cette partie E est un ensemble fini de cardinal n (sauf dans le théorème concernant les applications injectives) et p est un entier naturel non nul.

2.1 p-listes générales

Définition

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une *p-liste* (ou p-uplet) de E est un élément $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de E^p.

- **Remarque.** Dans une p-liste :
- l'ordre des éléments compte. • un même élément peut être répété.

Théorème

Le nombre de p-listes de E est n^p.

Situation modèle

On tire *successivement et avec remise* p boules dans une urne contenant n boules. Le nombre total de tirages possibles est n^p.

2.2 Arrangements

Définition

Un arrangement de p éléments d'un ensemble E est une p-liste d'éléments deux à deux distincts.

Théorème

Si $p \leq n$, le nombre de p-arrangement de E est : $n(n-1)\dots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Situation modèle

On tire *successivement et sans remise* p boules dans une urne contenant n boules. Le nombre de tirages possibles est $n(n-1)\dots(n-p+1)$

Théorème : Applications injectives

Si $\mathrm{Card}(E) = p$ et $\mathrm{Card}(F) = n$, alors il y a $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ applications injectives de E dans F si $p \leq n$ et aucune si $p > n$.

2.3 Permutations

- **Rappel.** Une permutation de E est une bijection de E sur E.

Théorème : Permutations

- Le nombre de permutations de E est $n!$

- **Interprétation.** Une permutation correspond à une façon de ranger/ordonner n les éléments de E. Il y a donc $n!$ façons d'ordonner n éléments distincts.

3 Parties d'un ensemble

- **Cadre.** • E est un ensemble fini de cardinal n • p est un entier relatif

3.1 Combinaisons

Définition

Une *combinaison de p éléments* de E est une partie de E de cardinal p *i.e.* de la forme $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$.

- **Remarques:** Dans une combinaison de p éléments
- les éléments sont donnés sans ordre. • les élément sont tous distincts.

Théorème

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est $\dbinom{n}{p}$ où :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } p \leq n \quad \text{et} \quad \binom{n}{p} = 0 \text{ si } p > n \text{ ou si } p < 0$$

Situation modèle

On tire *simultanément* p boules dans une urne contenant n boules. Le nombre de tirages possibles est : $\binom{n}{p}$.

- **Retenir.** Il y a $\dbinom{n}{p}$ listes $(x_1, \dots, x_p) \in [\![1, n]\!]^p$ telles que : $x_1 < \dots < x_p$.

3.2 Formulaire à savoir sur les coefficients binomiaux

Théorème

- *Symétrie :* $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ • *Formule de Pascal :* $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$
- *Formule « sans nom » :* $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ pour $p \geq 1$ et $n \geq 1$.

Théorème : Valeurs remarquables à connaître

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$

3.3 Dénombrement de $\mathscr{P}(E)$

Théorème

Le nombre de parties d'un ensemble E à n élément est 2^n : $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^{|E|}$

4 Indicatrices

4.1 Indicatrice d'une partie

- **Cadre.** • E est un ensemble • A et B sont des parties de E.

Définition

L'*indicatrice de A* est l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0, 1\}$ définie pour tout $x \in E$ par :

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème : Propriétés des indicatrices

1. • *Inclusion :* $A \subset B \iff \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$ • *Egalité :* $A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$
2. • *Opérations ensemblistes :*
   $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$ • $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$ • $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$

4.2 Lien avec le cardinal

Théorème : Lien avec le cardinal

Si E est fini, pour toute partie A de E : $|A| = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$

PROBABILITES SUR UN UNIVERS FINI

1 Expériences aléatoires

Description ensembliste d'une expérience aléatoire, dictionnaire événements $\leftrightarrow$ ensembles (événement certain, impossible, contraire, événements incompatibles ...)

Dans tout ce chapitre, Ω désigne un univers fini.

Définition

Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'événements. On dit que cette famille forme un *système complet d'événements* de Ω si :

i) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

ii) Les A_i sont deux à deux incompatibles : si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \varnothing$.

2 Probabilités

2.1 Définition d'une probabilité

Définition

Une probabilité sur Ω est une *application* $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant :

i) $P(\Omega) = 1$

ii) Pour tous $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ incompatibles : $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$.

On dit que (Ω, P) est un espace probabilisé (fini).

Théorème : Propriétés des probabilités

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$:

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap \overline{A})$.
- Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.
- $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.
- Si $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$, sont deux à deux incompatibles : $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

2.2 Exemples de probabilités

Définition

La probabilité *uniforme* sur Ω est $P : A \mapsto \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{\text{« nb de cas favorables »}}{\text{« nb de cas possibles »}}$

- **Conséquence.** Avec cette probabilité, le calcul des probabilités se ramène à des dénombrements.

Théorème

On note $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Soient $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}$ tels que :

- $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad p_i \in [0,1]$
- $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Il existe une unique probabilité P sur Ω telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad P(\{\omega_i\}) = p_i$.

Cette probabilité est définie pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ par : $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$.

2.3 Probabilité « sachant »

Définition

Soit $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ avec $P(A) > 0$. La *probabilité de B sachant A* est : $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

En pratique : calculer $P(A\cap B)$

En général on *connaît* $P_A(B)$ et on *cherche* $P(A\cap B)$: $\boxed{P(A\cap B) = P(A)P_A(B)}$

- **Remarque.** Lorsque $P(A) = 0$, on convient que : $P(A)P_A(B) = 0$.

3 Utiliser un système complet d'événements

Dans toute cette partie (Ω, P) est un espace probabilisé.

3.1 Formule des probabilités totales

Théorème

Soit $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ un système complet d'événements.

Pour tout événement B : $$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P_{A_k}(B).$$

En pratique

On l'utilise lorsque la réalisation de A dépend de la réalisation d'autres événements qui s'excluent les uns les autres (plusieurs branches conduisent au résultat)

3.2 Formule de Bayes ou « des probabilités des causes »

Théorème

Soit B un événement de probabilité non nulle.

1 Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$: $P_B(A) = P_A(B)\dfrac{P(A)}{P(B)}$.

2 Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'événements :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P_{A_k}(B)}.$$

En pratique

A utiliser lorsque l'on cherche à « remonter le temps » : la formule permet d'échanger le conditionnement *i.e.* passer de $P_B(A_k)$ à $P_{A_k}(B)$.

4 Probabilité d'une intersection

4.1 Formule des probabilités composées

Théorème : Formule des probabilités composées

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$:
$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)\ldots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

4.2 Indépendance de deux événements

Définition

Deux événements A et B sont dits indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$

- **Remarque.** Si $P(A) \neq 0$, alors A et B sont indépendants ssi $P_A(B) = P(B)$.

Théorème

Si A et B sont indépendants, alors il en va de même de A et $\overline{B}$, de $\overline{A}$ et B, de $\overline{A}$ et $\overline{B}$

4.3 Indépendance pour une famille d'événements

Définition

On dit que n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont (mutuellement) indépendants si, pour toute partie I de $[\![1, n]\!]$: $$P\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$

Attention $A_1, A_2, \ldots, A_n$ peuvent être deux à deux indépendants sans être mutuellement indépendants.

- **Généralisation du théorème 2.**. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ sont indépendants, il en va de même des événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ où $B_i \in \left\{A_i, \overline{A_i}\right\}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

Situations classiques d'indépendances.

On répète une **même** expérience **sans** modifier les conditions