Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

Exercice de cours

Exercice 1 *Exercice, feuille 21* — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E. Etablir : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \iff f^2 = 0$ et $n = 2\operatorname{rg}(f)$.

Exercice 2 *Exercice, feuille 21* — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que : $\dim(\operatorname{Ker}(g \circ f)) \leq \dim(\operatorname{Ker} g) + \dim(\operatorname{Ker} f)$

Exercice 3 *Résultats de cours, Chap 24 I* —
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ f = f$. Montrer que f est un projecteur.

Exercice 4 *Exemple 1 du cours, Chap 24 I* — On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$: $F = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\right\}$ et $G = \operatorname{Vect}\big((1,1,1)\big)$

1. Vérifier que F et G sont supplémentaires (*Vous pouvez au choix opter pour une preuve à base de dimensions ou pour une preuve qui fournit la décomposition*)
2. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et p le projecteur sur F parallèlement à G. Calculer $p(u)$

1 Généralités

Sauf mention du contraire, E et F sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ (= $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1.1 Montrer qu'une application est linéaire

Définition

Une application $f : E \to F$ est dite *linéaire* si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

- **Vocabulaire.** Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, forme linéaire.
- **Remarque.** $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est un morphisme de groupes additifs donc $\boxed{f(0_E) = 0_F}$

1.2 Opérations sur les applications linéaires

Théorème

$\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel (pour les lois usuelles).

Théorème

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
$g \circ f$ est une application linéaire : $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.

- **Remarque.** $\boxed{(\mathscr{L}(E), +, \circ) \text{ est un anneau}}$.
- **Conséquence.** Pour $f \in \mathscr{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$, $f^0 = \operatorname{Id}_E$ et $f^n = f \circ f \circ \ldots f$ si $n \geq 1$.

Si f et g commutent $\boxed{(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}}$ $\boxed{f^n - g^n = (f-g) \circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k}}$

Théorème

Si f est un isomorphisme de E sur F, alors f^{-1} est linéaire.

- **Remarque.** $\boxed{(GL(E), \circ) \text{ est un groupe}}$ (groupe des inversibles de l'anneau $\mathscr{L}(E)$).

2 Noyau et image d'une application linéaire

- **Cadre.** f est une application linéaire de E dans F.

2.1 Définitions

Définition

- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de 0_F par f : $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E
- L' *image* de f, notée $\operatorname{Im} f$, est l'ensemble $\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x),\ x \in E\}$. C'est un sous-espace vectoriel de F

- $\boxed{x \in \operatorname{Ker} f \text{ signifie : } f(x) = 0_F}$
- $\boxed{y \in \operatorname{Im} f \text{ signifie : il existe } x \in E \text{ tel que } f(x) = y}$

Théorème

- Si E_1 est un sous-e.v. de E alors $f(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F.
- Si F_1 est un sous-e.v. de F alors $f^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E.

2.2 Noyau : détermination pratique, lien avec l' injectivité

Théorème : Injectivité et noyau

f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Rédaction : pour montrer que $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est injective

Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0_F$. ... Donc $x = 0_E$.

2.3 Image : détermination pratique, lien avec la surjectivité

Théorème : Surjectivité et image

f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

3 Applications linéaires et bases

- **Cadre.** $\mathscr{B} = (b_i)_{i\in I}$ est une base de E

3.1 Utiliser une base de E pour déterminer $\operatorname{Im} f$

Théorème

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(b_i)\big)_{i\in I}$.

- **Remarque.** Il suffit que $(b_i)_{i\in I}$ soit génératrice de E

3.2 Base de E et injectivité surjectivité ou bijectivité

Théorème

Soit f une application linéaire de E dans F.

i) f est injective si et seulement si $\big(f(b_i)\big)_{i\in I}$ est libre

ii) f est surjective si et seulement si $\big(f(b_i)\big)_{i\in I}$ est génératrice de F

iii) f est bijective si et seulement si $\big(f(b_i)\big)_{i\in I}$ est une base de F

3.3 Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base ou une somme directe

Définition

Soit $j \in I$. La j^e *forme coordonnée* de E est la forme linéaire : $\varphi_j : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \sum_{i\in I} x_i b_i & \longmapsto & x_j \end{array}$

Elle vérifie : • $\varphi_j(b_j) = 1$ • $\varphi_j(b_i) = 0$ pour tout $i \neq j$

Théorème : « Interpolation linéaire »

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F.
Il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que : $\forall i \in [\![1\,,n]\!],\ f(b_i) = u_i$.

- **Conséquence.** Pour définir $f \in \mathscr{L}(E,F)$ il suffit de définir les valeurs de f sur les vecteurs d'une base de E.

Théorème

On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$. Soient $f_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$ et $f_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$.
Il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que : • $f_{|E_1} = f_1$ • $f_{|E_2} = f_2$

3.4 Espaces de dimension finie isomorphes

Théorème

On suppose E de dimensions finie.
F est isomorphe à E ssi F est de dimension finie et : $\dim E = \dim F$.

4 Rang d'une application linéaire

- **Cadre.** $f \in \mathscr{L}(E,F)$

4.1 Définition du rang

Définition

- f est dite de *rang fini* si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie.
- En ce cas on pose : $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$

- **Remarque.** Si E est de dimension finie muni d'une base $(b_1,\dots,b_n)$ alors f est de rang fini et $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}\big(f(b_1),\dots,f(b_n)\big)$.

4.2 Théorème du rang

Théorème : Forme géométrique du théorème du rang

On suppose que $\operatorname{Ker} f$ possède un supplémentaire S dans E. Dans ce cas $\varphi : \begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & \operatorname{Im} f \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} f$ (isomorphisme *induit* par f)

Théorème : Théorème du rang

Si E est de dimension finie : $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$

Théorème : Miracle de la dimension finie

On suppose E et F de même dimension finie. Alors il y a équivalence entre :
i) f est injective *ii)* f est surjective *iii)* f est bijective

- **Remarque.** Le théorème s'applique en particulier lorsque f est un endomorphisme en dimension finie.

4.3 Rang et composition

Théorème

Si E est de dimension finie et si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors :
- $f \in GL(E) \Leftrightarrow \exists g \in \mathscr{L}(E) \mid g \circ f = \mathrm{Id}_E$
- $f \in GL(E) \Leftrightarrow \exists g \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ g = \mathrm{Id}_E$

Théorème : Rang d'une composée

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$ de rang fini.
L'application $v \circ u$ est de rang fini et $\operatorname{rg}(v \circ u) \le \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$

Théorème : Composer par un isomorphisme ne modifie pas le rang

On suppose E, F et G de dimensions finies. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
- Si f est un isomorphisme : $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(g)$
- Si g est un isomorphisme : $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f)$

COMPLEMENT : PROJECTEURS ET SYMETRIES

1 Projecteurs et symétries

- **Cadre.** E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces supplémentaires de E : pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y,z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$.

1.1 Projecteurs

Définition

Le projecteur sur F parallèlement à G est l'application $p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x = y + z & \longmapsto & y \end{array}$

Théorème

1. p est linéaire. 2. $G = \operatorname{Ker} p$ et $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Inv} p$ 3. $p \circ p = p$.

- **Remarque.** $\operatorname{Inv} p$ désigne ici l'ensemble des vecteurs invariants par p :

$$F = \operatorname{Inv} p = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$$

Théorème

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Si $f \circ f = f$, alors f est un projecteur.

En pratique :

Pour montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur, il suffit de calculer $f \circ f$.

1.2 Symétries

Définition

La symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'application $s : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x = y + z & \longmapsto & y - z \end{array}$

- **Lien avec le projecteur p.** $s = 2p - \operatorname{Id}_E$.

Théorème

1. s est linéaire : $s \in \mathscr{L}(E)$. 2. $F = \operatorname{Inv} s$ et $G = \operatorname{AntiInv} s$ 3. $s \circ s = \operatorname{Id}_E$.

- Ici encore : $F = \operatorname{Inv} s = \{x \in E \mid s(x) = x\} = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E)$
- $\operatorname{AntiInv} s$ désigne ici l'ensemble des vecteurs anti-invariants par s :

$$G = \operatorname{AntiInv} s = \{x \in E \mid s(x) = -x\} = \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$$

Théorème

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Si $f \circ f = \operatorname{Id}_E$, alors f est une symétrie.

En pratique :

Pour montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie, il suffit de calculer $f \circ f$.

L'adresse de la page des maths est : `https://mathieucathala.fr`